МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУ»

В. Д. Ціделко, Н. А. Яремчук, С. А. Затока,
Г. К. Бурченков, В. В. Шведова, В. А. Стасевич

Основи метрології та вимірювальної техніки

Том 1

За загальною редакцією Н. А. Яремчук

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як система дистанційного навчання за дисципліною «Метрологія та вимірювання» для студентів вищих навчальних закладів

Київ
Видавництво «Політехніка»
2012

УДК 621.317.08

Сл. Інф ???

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як система дистанційного навчання за дисципліною «Метрологія та вимірювання» для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/ІІ-4453 від 02.06.2011 р.)

Рецензенти:

Скрипник Ю.А. – професор кафедри «Автоматизації комп’ютерних систем» Київського національного університету технологій і дизайну, доктор технічних наук.

Кондратов В.Т. – провідний науковий співробітник інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, доктор технічних наук, професор.

Ціделко В.Д., Яремчук Н.А., Затока С.А., Бурченков Г.К., Шведова В.В., Стасевич В.А.

Основи метрології та вимірювальної техніки. Навчальний підручник / За заг. ред. Н.А. Яремчук. – К: Видавництво «Політехніка», 2012. - ____ с.

ISBN __________

В учбовому посібнику викладені загальні поняття метрології, основні положення теорії похибок вимірювання, способи використання невизначеності у разі подання результату вимірювання, способи нормування і оцінювання характеристик засобів вимірювальної техніки, а також особливості формування вимірювальної інформації в цифрових засобах вимірювання.

Для студентів вищих закладів освіти, а також інженерно-технічних працівників у галузі вимірювальної техніки.

Службова інф.

Нашому вчителю, Петру Павловичу Орнатському присвячується

ПЕРЕДМОВА

Колектив кафедри інформаційно-вимірювальної техніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» протягом багатьох років займається фундаментальними дослідженнями в галузі метрології. Ця робота знайшла впровадження у підручниках та навчальних посібниках; державних стандартах України з метрології, численних публікаціях та доповідях на вітчизняних та зарубіжних конференціях та симпозіумах. Такий досвід дозволяє достатньо кваліфіковано подати базу знань з предметної області у вигляді електронного інформаційного ресурсу, який є основою для запровадження сучасних технологій навчання. Тому пілотний проект «Дистанційне навчання для підготовки бакалаврів за напрямом 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», започаткований наказом ректора НТУУ «КПІ» № 1-114 від 1.08.2005 р. став логічним продовженням науково-дослідної роботи кафедри інформаційно-вимірювальної техніки в області дослідження та впровадження в навчальний процес сучасних інформаційних технологій.

Систему дистанційного навчання (СДН) «Метрологія та вимірювання» створено за допомогою спеціалізованих платформ для організації новітніх форм навчання та комп'ютеризованого тестування Lotus Notes LearningSpace та Moodle. СДН «Метрологія та вимірювання» розміщена на сервері Українського інституту інформаційних технологій в освіті НТУУ «КПІ» за електронною адресою: www.uiite.kpi.ua → **Дистанційні курси** → **спеціальність 6.051001** → **Метрологія та вимірювання**. Представлена система дистанційного навчання забезпечує підготовку за дисципліною «Метрологія та вимірювання» напряму підготовки бакалаврів 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» і використовується для підготовки фахівців за двома спеціальностями: «Метрологія та вимірювальна техніка» та «Інформаційно-вимірювальні системи».

Метою вивчення дисципліни є створення у студентів системного метрологічного підходу до основних понять вимірювальної техніки з урахуванням розподілу процедури вимірювання на основні метрологічні операції, взаємного зв'язку між методами вимірювання і структурами засобів вимірювання, особливостей аналізу похибок вимірювання і основних характеристик засобів вимірювання. Метрологічний підхід базується на знаннях основних понять метрології, систематизованих за родовими групами, особливостей аналізу похибок засобів вимірювальної техніки і процедури вимірювання, способів подання результатів вимірювання з характеристиками невизначеності, методів обробки даних прямих та опосередкованих (одноразових та багаторазових), сукупних і сумісних вимірювань, метрологічних характеристик засобів вимірювальної техніки, способів їх нормування і визначення на основі експериментальних досліджень та теоретичних розрахунків.

В інформаційному ресурсі СДН «Метрологія та вимірювання» детально висвітлюються питання особливостей аналізу похибок засобів вимірювальної техніки і процедури вимірювання, способів подання результатів вимірювання, метрологічних характеристик засобів вимірювальної техніки, способів їх нормування і визначення на основі експериментальних досліджень та теоретичних розрахунків. Подаються необхідні знання для розрахунку похибок засобів вимірювання на рівні структурного аналізу, втому числі для засобів вимірювань, що містять аналогово-цифрові перетворювачі та обчислювальні компоненти.

В процесі вивчення дисципліни у студентів формуються такі знання та уміння:

- знання основних понять метрології і її методології;
- знання основ вимірювальної техніки, необхідних при проведенні експериментальних досліджень і обробці результатів експериментів;
- знання основних методів підвищення точності вимірювань;
- знання основ теорії похибок вимірювання і засобів вимірювання;
- знання способів подання результатів вимірювання з невизначеністю;
- знання способів нормування метрологічних характеристик засобів вимірювальної техніки і способів їх оцінювання за розрахунками і експериментом;
- уміння оцінювати похибки прямих і непрямих, одноразових і багаторазових вимірювань з урахуванням характеристик об'єкта, засобів вимірювальної техніки, умов вимірювань і подавати результати вимірювань з невизначеністю;
- навички в поданні результатів вимірювання з урахуванням вітчизняних і зарубіжних стандартів;
- знання основ метрологічного забезпечення;
- знання основних методів метрологічного обслуговування засобів вимірювальної техніки, що використовуються;
- уміння в обчисленні похибок вимірювань за нормованими метрологічними характеристиками засобів вимірювальної техніки;
- уміння у визначенні похибок як окремих засобів вимірювальних операцій, так і засобів вимірювань на рівні структурного аналізу;
- уміння у визначенні похибок засобів вимірювань, що містять обчислювальний компонент.

Отримані при вивченні дисципліни знання та уміння використовуються в подальшому при вивченні дисциплін циклу професійної та практичної підготовки.

Цільова аудиторія СДН «Метрологія та вимірювання» – студенти молодших курсів напрямку підготовки 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології». Крім того матеріали, наведені в СДН «Метрологія та вимірювання» є корисними і для студентів молодших курсів інших технічних спеціальностей, пов'язаних з вимірюваннями, а також для студентів старших курсів напрямку підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» і спеціалістів, які займаються розробкою та використанням засобів вимірювальної техніки.

Електронний інформаційний ресурс СДН «Метрологія та вимірювання» складається з частин, наведених на ілюстрації.

В першому томі учбового посібника «Основи метрології і вимірювальної техніки» наведено лекційний матеріал з наступних розділів курсу:

- Загальні поняття метрології.
- Характеристик випадкових похибок.
- Моделі похибок вимірювальної техніки, нормування класів точності.
- Методи підвищення точності вимірювань і способи виявлення

систематичної складової похибки.

- Використання невизначеності у разі подання результату вимірювання.
- Аналогові вимірювальні перетворювачі. Основні характеристики.
- Особливості формування вимірювальної інформації в цифрових засобах вимірювання.

В другому томі буде наведено лекційний матеріал з розділів курсу «Способи нормування і оцінювання характеристик засобів вимірювальної техніки» та «Опрацювання результатів вимірювання», матеріал практичних занять, фрагменти лабораторних робіт і тестових (контрольних) запитань.

Автори щиро вдячні рецензентам: Скрипнику Ю.А., професору кафедри «Автоматизації комп'ютерних систем» Київського національного університету технологій і дизайну, доктор технічних наук та Кондратову В.Т., провідному науковому співробітнику інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, доктор технічних наук, професор.

За відгуки та зауваження, які можна направляти за адресою: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», кафедра інформаційно-вимірювальної техніки, КПІ-4120, м. Київ-56, пр.. Перемоги, 37, 03056, Україна, автори заздалегідь вдячні читачам.

Зміст

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ МЕТРОЛОГІЇ

Кожна наука чи галузь знань починається з класифікації її понять. Поняття науки - це основа її мови, мислення та обміну думками [2]. Основою кожного поняття є його суттєві ознаки, які відображають сутність даного об'єкту. В кожній науці діє не розрізнена сукупність понять, а система понять, пов'язаних між собою в різних відношеннях та розподілених за суттєвими ознаками. В розділі «Загальні поняття метрології» наведено терміносистему метрології, в якій поняття систематизовано за родовими групами «метрологія», «величина», «значення величини», тощо.

1.1. Метрологія.

Метрологія - наука про вимірювання, яка включає як теоретичні, так і практичні аспекти вимірювань у всіх галузях науки і техніки.

Метрологія не народилася на рівному місці, вона узагальнює досвід предків, бо пройшла великий шлях від порівняльних описів мір до науки, що визначає характер сучасної науково - технічної революції. Підтвердженням є слова академіка О.П. Олександрова «Метрологія є важливішою стороною складного процесу удосконалення технології і якості продукції. В той же час сама метрологія необхідна для виявлення місць неузгодженості в наукових дослідженнях, і тому визначає ті напрямки, за якими можна очікувати принципове зрушення в науці. Тільки держава, що має передове приладобудування і метрологію, може бути передовою в науці».

Широко відомі вислови про вплив метрології на науку і пізнання природи основоположників метрології Д.І. Менделєєва «Наука починається тоді, як починають вимірювати» і Д. Томсона «Кожна річ відома лише в тій мірі, в якій її можна виміряти».

Класичним прикладом внеску метрології в розвиток науки стали відкриття дейтерію при підвищенні точності вимірювання густини води і створення теорії відносності при підвищенні точності вимірювання швидкості розповсюдження світлових хвиль між рухомим джерелом і приймачем світла.

1.2. Властивості і величини.

Об'єкти матеріального світу (предмети, процеси, явища, тощо) характеризуються властивостями: матеріальними (фізичними) і нематеріальними. Згідно [1] властивості розподіляються на номінальні властивості (nominal properties) і величини (quantities). Номінальна властивість це властивість, прояви якої є однаковими чи неоднаковими у різних об'єктів, тобто вона проявляється тільки у відношенні еквівалентності. Наприклад, властивість «колір» має прояви: червоний, синій, зелений, тощо. Об'єкти відрізняються за проявами властивості і можуть бути розпізнані або експертами або технічними засобами [3].

Якщо властивість об'єкта може проявлятись в більшому або меншому ступеню, тобто підлягає кількісній оцінці, її називають величиною. Згідно [2] величина це властивість, спільна в якісному відношенні у багатьох об'єктів та індивідуальна в кількісному відношенні у кожного з них. Згідно [1] величина це властивість явища, предмета або речовини, для якої може бути визначений розмір. У відповідності з цими визначеннями величина може бути охарактеризована родом і розміром. Рід величини це її якісна визначеність. Розмір величини це кількісний вміст в даному об'єкті властивості, що відповідає поняттю «величина».

Поняття розміру і роду створюють підґрунтя для визначення однорідних величин (quantities of the same kind), таких що згідно [1] можуть бути розміщені за розміром одна відносно іншої. За якісним проявом такі величини однакові і можуть бути об’єднані в категорії, класи.

Величини однієї такої категорії називають однорідними. Наприклад, фізичні величини: діаметр виробу, висота, ширина, довжина, відстань - однорідні і належать до однієї категорії - довжини. Однорідні величини мають однакову розмірність, але однакова розмірність не є ознакою однорідності. Приклад неоднорідних величин з однаковою розмірністю: енергія, робота, кількість тепла (розмірність $ì^{-2} \cdot êã \cdot ñ^{-2}$).

Властивість є емпіричною системою з відношеннями

$$\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}; \boldsymbol{R} \rangle ,$$

де $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n\}$ - сукупність проявів властивості; $\boldsymbol{R}$ - сукупність відношень між цими проявами.

У загальному випадку до $\boldsymbol{R}$ входять відношення еквівалентності, порядку і комбінування $R = \langle \sim, >; \circ \rangle$ [4].

Властивості і величини можуть проявлятися у відношеннях еквівалентності, порядку і комбінування.

Відношення еквівалентності є експлікацією таких понять як «однаковість», «взаємозамінність» для відношення конгруентності [10].

Еквівалентність задовольняє умовам рефлективності, симетричності і транзитивності. Її позначають знаком $\sim$. При цьому $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ означає, що

впорядкована пара $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ належить множині $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, що є відношенням еквівалентності на множині $\boldsymbol{M}$.

Властивості еквівалентності записують так:

- $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}$ (рефлексивність);
- якщо $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}$ (симетричність);
- з $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ і $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{z}$, витікає $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$ (транзитивність).

Важливе значення еквівалентності полягає в тому, що це відношення визначає ознаку, за якою допускають розбивку множини $\boldsymbol{M}$ на підмножини, що не перетинаються між собою, які називають класами еквівалентності [10].

Довільне відношення еквівалентності визначає на певній множині узагальнену форму рівності. Класи еквівалентності складаються з усіх тих елементів, що не розрізняються з точки зору даного відношення еквівалентності. Розбивка множини на класи означає ідентифікацію еквівалентних між собою елементів. При цьому кожний клас визначається його представником (еталоном) і ототожнюється з загальною властивістю чи сукупністю властивостей (параметрів) елементів, що входять до класу. Крайнім випадком відношення еквівалентності є тотожна рівність.

Відношення порядку має властивості рефлективності, транзитивності і антисиметричності. Його прийнято позначати символом $\leq$. Позначення $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ означає, що пара $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ належить множині $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, що є відношенням порядку на множині $\boldsymbol{M}$, причому $\boldsymbol{x}$ передує $\boldsymbol{y}$ (або $\boldsymbol{y}$ йде слідом за $\boldsymbol{x}$).

В прийнятих позначеннях властивості відношення порядку записують так [10]:

- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$ (рефлестивність);
- якщо $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ і $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}$, витікає $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z}$ (транзитивність);
- з $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ і $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}$ витікає $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (антисиметричність).

Множину, на якій визначено відношення еквівалентності, називають впорядкованою, і говорять, що порядок введено цим відношенням.

Відношення, що має тільки властивості транзитивності і антирефлексивності (наслідок цих двох властивостей є також асиметричність і антисиметричність) називають відношенням суворого порядку і позначають символом $<$. Емпіричне відношення суворого порядку (у відміну від формального) позначають $\succ$. Говорять, що $\boldsymbol{x}_j$ покриває $\boldsymbol{x}_i$, якщо $\boldsymbol{x}_i < \boldsymbol{x}_j$.

Якщо на множині $\boldsymbol{A}$ встановлено відношення еквівалентності і порядку, на ній може бути визначено відношення комбінування. Розглянемо об’єкти $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \Omega$, що мають прояви властивостей $q_1, q_2, q_3, q_4 \in A$. Для екстенсивної шкали вимірювання повинна бути операція комбінування ω_1, ω_2 по ідношенню до q_1, q_2, яку позначають $q_1 \circ q_2$ з такими ж формальними властивостями як додавання (відношення додавання називають також відношенням адитивності).

В прийнятих позначеннях для $\forall q \in A$ властивості відношення комбінування записують так [4]:

- $q_1 \circ q_2 \in A$;
- $q_1 \circ q_2 > q_1$;
- $q_1 \circ q_2 \sim q_2 \circ q_1$ (комутативність);
- $q_1 \circ (q_2 \circ q_3) \sim (q_1 \circ q_2) \circ q_3$ (асоціативність);
- якщо $q_2 \sim q_3$, тоді $q_1 \circ q_2 \sim q_1 \circ q_3$; якщо $q_3 > q_2$, тоді $q_1 \circ q_3 > q_1 \circ q_2$;
- якщо $q_1, q_2, q_3, \ldots$ еквівалентні і $q_1 < q_1'$, тоді існує множина n таких q_i, що $q_1' < q_1 \circ q_2 \circ \ldots \circ q_n$ (постулат Архімеда).

В залежності від прояву найбільш загальних відношень еквівалентності, порядку і комбінування в [3] властивості і величини розподілено на три наступних види:

- властивості, що проявляють себе тільки у відношенні еквівалентності $\mathbf{A} = \langle A; \sim \rangle$;
- інтенсивні величини, що проявляють себе у відношеннях еквівалентності і порядку $\mathbf{A} = \langle A; \sim; > \rangle$;
- екстенсивні величини, що проявляють себе у відношеннях еквівалентності, порядку і комбінування $\mathbf{A} = \langle A; \sim; >; \circ \rangle$.

Відображенням емпіричної системи при вимірюванні є числова система з відношеннями:

$$\mathbf{N} = \langle N; P \rangle,$$

де N **-** ряд чисел, а P - ряд відношень, визначених на N. У загальному випадку $P = \langle =; >; + \rangle$. Репрезентаційна умова [4] вимагає, щоб вимірювання було встановлено у відповідності між проявами величини і припускали відношення між їх зображеннями на ряді чисел.

Формально вимірювання визначається як об’єктивна емпірична операція:

$$M : A \to N$$

така, що $\mathbf{A} = \langle A; R \rangle$, наноситься гомоморфно на $\mathbf{N} = \langle N; P \rangle$ за допомогою M і F, де F - один до одного перенесення з областю R і номерами P:

$$F : R \to P .$$

Під гомоморфним перенесенням розуміють, що для всіх $R_i \in R$ і всіх $P_i \in P$ та $P_i = F(R_i)$ справедливо

$$R_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leftrightarrow P_i(M(a_1), M(a_2), \ldots, M(a_n)).$$

Вимірювання - гомоморфізм, тому що M не є перенесенням один до одного, воно супроводжується невизначеністю і відображення при вимірюванні не є взаємно однозначним.

Тоді кортеж $\Phi = \langle A; N; M; F \rangle$ встановлює шкалу вимірювання для $n_i = M(a_i)$. Зображення a_i в N при M буде числовим значенням величини за шкалою Φ.

Таким чином, за встановленою шкалою вимірювані величини розподіляють на ординальні величини (ordinal quantity); величини, що їх вимірюють за шкалою різниць (differential quantity); величини, що їх вимірюють за шкалою відношень (rational quantity) [1]. В [1] наведено визначення ординальної величини як величини, для якої визначено загальне відношення порядку з іншими однорідними величинами, але для якої не встановлено алгебраїчні операції з цими величинами. Приклади ординальних величин: твердість за шкалою Роквелла С.; октанове число бензину; сила землетрусу за шкалою Ріхтера. Приклади величин, які вимірюють за шкалою різниць: температура, час. Приклади величин, які вимірюють за шкалою відношень: маса, сила електричного струму.

Результатом вимірювання є інформація про розмір величини, отримана експериментально. Кількісний принцип вимірювання, що наведений в [5], за яким числове значення отримують з рівняння

$$N = E\left|\frac{x}{q_x}\right|,$$

де $E|\bullet|$ - ціла частина відношення розміру величини x до розміру одиниці q_x, відноситься тільки до величин, які вимірюють за шкалою різниць і відношень.

Систематизацію властивостей і величин наведено на рис. 1.1.

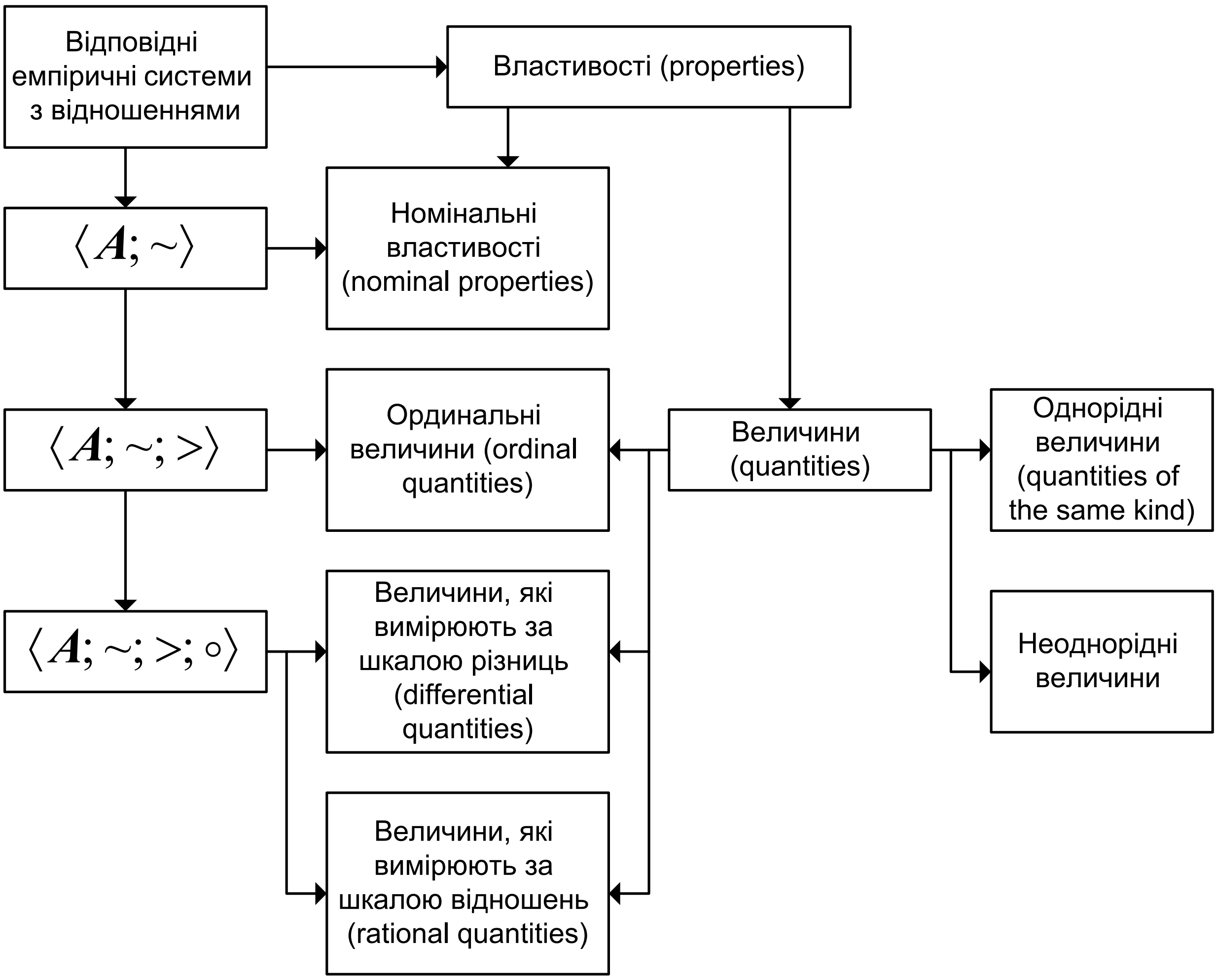


Рисунок 1.1. Систематизація властивостей і величин.

1.3. Система величин, розмірність величин.

Система величин - сукупність взаємопов'язаних величин, в яких декілька величин приймають за незалежні, а інші визначають як залежні від них.

Треба відмітити, що ординальні величини, такі як твердість за Роквеллом С., не входять до системи величин, тому що вони відносяться до величин іншого виду.

Міжнародна система величин ISQ (International System of Quantities) - система величин разом з рівняннями зв'язку між величинами, на якій базується система SI (International System of Units).

Основна величина - величина, що входить до системи величин і яку приймають за незалежну від інших величин цієї системи (табл. 1.1)

Похідна величина - величина, що входить до системи величин та визначається через основні величини цієї системи.

Розмірність величини - вираз, що відображає її зв'язок з основними величинами системи.

Розмірність основної величини - умовний символ величини в даній системі величин (табл. 1.1).

Таблиця 1.1. Основні величини ISQ

Найменування величини		**Умовний символ величини в системі**
українське	**міжнародне**	
Довжина	Length	L
Маса	Mass	M
Час	Time	T
Сила електричного струму	Electric current	I
Термодинамічна температура	Thermodynamic temperature	θ
Кількість речовини	Amount of substance	N
Сила світла	Luminous intensity	J

Розмірність похідної величини - добуток розмірностей основних величин, піднесених до відповідних степенів, наприклад, розмірність швидкості **V** в системі величин ISO:

$$\dim \boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{T}^{-1},$$

де L - довжина, T - час.

У загальному вигляді для кожної фізичної величини розмірності можуть бути записані з використанням умовних символів:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{L}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{M}^{\beta} \cdot \boldsymbol{T}^{\gamma} \cdot \boldsymbol{I}^{\varepsilon} \cdot \theta^{\eta} \cdot \boldsymbol{J}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{N}^{\delta},$$

де $\boldsymbol{z}$ - вимірювана величина; $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}, \theta, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{N}$ - величини, що прийняті за основні (L - довжина, M - маса, T - час, I - сила струму, θ - температура, J - сила світла, N - кількість речовини); $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \lambda, \delta$ показники степенів, за яких основна величина входить в рівняння при визначенні похідної величини.

Як вже відмічалось, величини з однаковою розмірністю не завжди є однорідними.

1.4. Розмірнісні і безрозмірнісні величини.

Розмірнісна величина - величина, в розмірності якої розмірність хоча б однієї з основних величин піднесена до степеня, що не дорівнює нулю.

Безрозмірнісна величина - величина, в розмірності якої всі степені розмірностей основних величин дорівнюють нулю.

В рекомендаціях ISO і в [7] наведено наступні види безрозмірнісних величин:

Фактор.

Фактором називають коефіцієнти лінійної залежності двох величин однакової розмірності, але неоднорідних.

Для електричних величин це, наприклад, фактор зв'язку (coupling factor)

$$K = \frac{|L_{mn}|}{\sqrt{L_m \cdot L_n}},$$

фактор якості - добротність (quality factor)

$$Q = \frac{|X|}{R}$$

фактор потужності (power factor)

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Відношення.

Відношення - результат ділення двох однорідних величин. Цей термін найчастіше використовують в характеристиках кіл. Наприклад, відношення відбиття (reflection ratio), відношення напруг стоячої хвилі (standing wave voltage ratio).

Відносна величина.

Відносна величина - відношення величини до опорної однорідної величини.

Наприклад, відносна магнітна проникність (relative permeability).

Рівень.

Рівень - логарифм відносної величини.

Для рівня введено некогерентні одиниці: бел, непер.

1.5 Одиниці вимірювання.

Одиниця величини - скалярна величина певного розміру, прийнята за угодою для кількісного відображення однорідних з нею величин.

Одиницю основної величини називають основною, а похідної - похідною. Наприклад, в ISQ довжина - основна величина і в SI метр основна одиниця довжини. Основна одиниця може також використовуватись для похідних

величин однакової розмірності. Наприклад, рівень падіння дощу, що визначається як об'єм, поділений на площу, має одиницю метр як когерентну похідну одиницю.

Сукупність основних і похідних одиниць певної системи величин становить систему їх одиниць.

При побудові системи одиниць вибір основних величин і розмірів їх одиниць теоретично довільний, але він продиктований певними вимогами практики а саме [8]:

- число основних величин має бути невелике;
- за основні мають бути вибрані величини, одиниці яких легко відтворити з високою точністю;
- розміри основних одиниць мають бути такі, щоб на практиці значення всіх величин системи не виражалися ні надто малими, ні надто великими числами;
- похідні одиниці мають бути когерентні, тобто входити в рівняння, що пов'язують їх з іншими одиницями системи, з коефіцієнтом 1.

Наприклад, у випадку механічних величин на підставі другого закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{dV}{dr} = m\frac{d^2e}{dt^2},$$

що виражає залежність між величинами F, e, m, t, три з яких можна вважати незалежними і одержати чотири системи: LMT, LFT, LMF і FMT. Система LMT вигідно відрізняється від інших тим, що розмір маси, як і довжини, і часу, на відміну від сили F, не залежить від положення на земній кулі, а одиниці величин *L*, *M* та *T* легко відтворити з високою точністю.

Система одиниць це обрана за узгодженням сукупність основних та похідних одиниць, а також їх кратних і часткових одиниць, разом з сукупністю правил для їх використання.

Когерентна одиниця - похідна одиниця, пов'язана з іншими одиницями системи рівнянням, в якому числовий коефіцієнт дорівнює одиниці.

Когерентна система одиниць це система одиниць, усі похідні одиниці якої когерентні.

Міжнародна система одиниць SI - когерентна система одиниць, заснованих на ISQ, їх найменуваннях і символах, з сукупністю префіксів і їх найменувань і символів, разом з правилами їх використання, що прийнята Генеральною конференцією по вагам і мірам (CGPM).

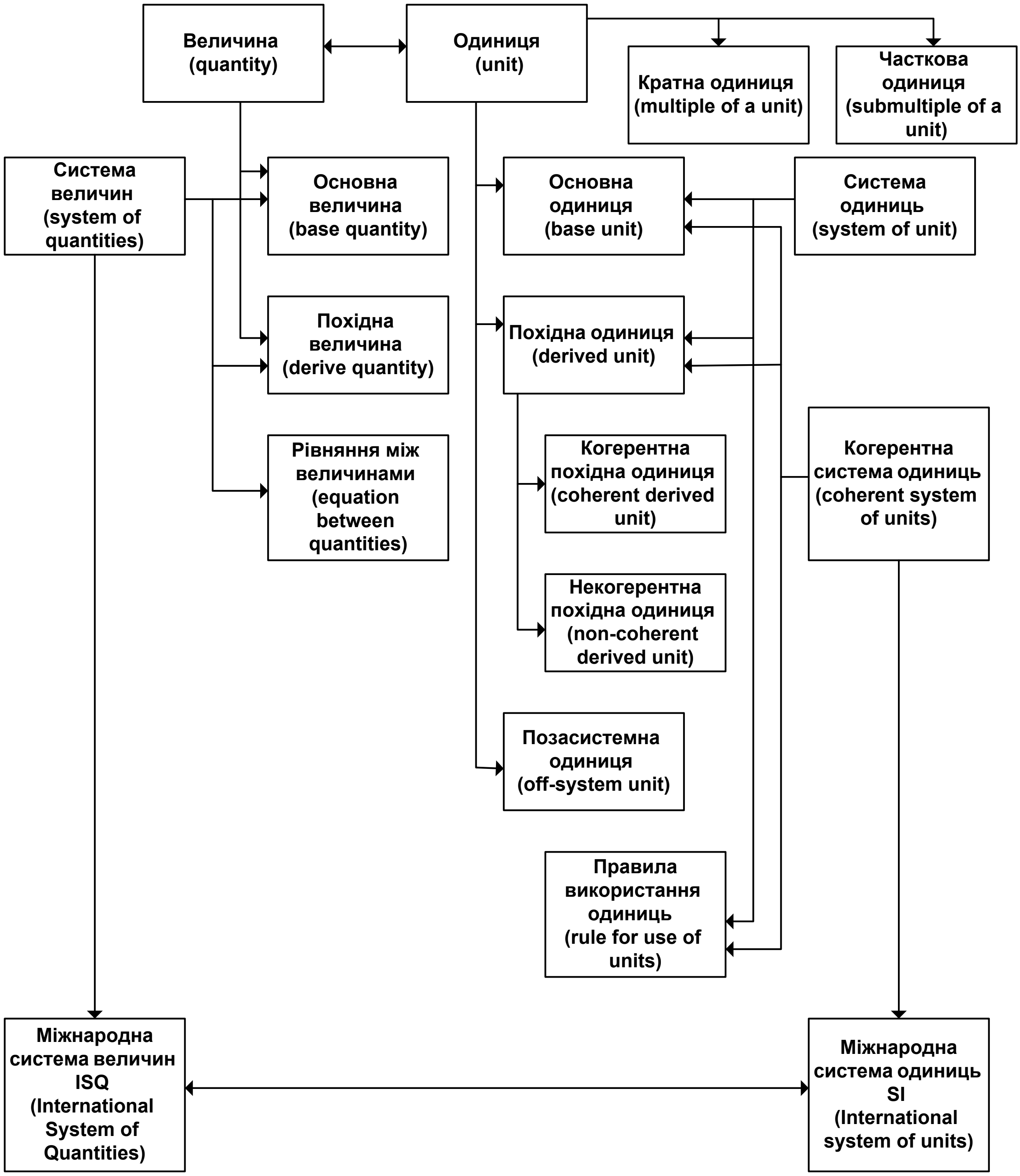


Рисунок 1.2. Ілюстративна діаграма термінологічних зв’язків до розділу 1.5

Система SI заснована на семи основних одиницях (табл. 1.2).

Табл. 1.2. Основні одиниці системи SI

Величина	Одиниця			
	найменування		позначення	
	міжнародне	українське	міжнародне	українське
Маса	metre	метр	m	м
Довжина	kilogram	кілограм	kg	кг
Час	second	секунда	s	с
Сила електричного струму	ampere	ампер	A	A
Термодинамічна температура	kelvin	кельвін	K	К
Кількість речовини	mole	моль	mol	моль
Сила світла	candela	кандела	cd	кд

Одиницю величини, що не належить до даної системи одиниць називають позасистемною одиницею.

Наприклад: доба, година, хвилина - позасистемні одиниці часу щодо системи SI.

До позасистемних одиниць належать також відносні одиниці: процент (відсоток) - % ($1\% = 10^{-2}$); проміле - ‰ ($1\% = 1$ pm $= 10^{-3}$); в мільйонних частках ppm (1 ppm – 10^{-6}).

Позасистемні одиниці рівнів називають логарифмічними одиницями: бел - Б; децібел дБ; октава - окт; декада - дек.

Для рівнів струму і напруги $1\text{äÁ} = 0{,}1\text{Á} = 20\lg\frac{x_2}{x_1}$; для рівнів потужності $1\text{äÁ} = 10\lg\frac{P_2}{P_1}$; для відношень частот $1\text{îêò} = \ln\frac{f_2}{f_1}$; $1\text{äåê} = \lg\frac{f_2}{f_1}$.

Одиниця, що в ціле число разів більша за системну або позасистемну, називається кратною одиницею. Наприклад, 1 кілометр = 1000 м; 1 хвилина - 60 с. Одиниця, що в ціле число разів менша за системну або позасистемну називається частковою одиницею. Наприклад, 1 мм = 10^{-3} м.

Множники, найменування та позначення префіксів для утворення десяткових кратних і часткових одиниць наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3. Префікси для утворення десяткових кратних і часткових одиниць.

Множник	Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення
10^{12}	тера	Т	10^{-1}	деци	д
10^{9}	гіга	Г	10^{-2}	санти	с
10^{6}	мега	М	10^{-3}	мілі	м
10^{3}	кіло	к	10^{-6}	мікро	мк
10^{2}	гекто	г	10^{-9}	нани	н
10^{1}	дека	да	10^{-12}	піко	р

Ілюстративна діаграма для розділу «Одиниці вимірювання» наведена на рис.1.2.

1.6. Значення величини, рівняння зв'язку між величинами.

В [5] формування поняття «значення величини» проводиться на основі поняття «числове значення величини, тобто послідовність термінологічного зв'язку така: «числове значення величини» → «значення величини» (рис. 1.3). Числове значення величини за [5] це число N_x, що дорівнює відношенню розміру величини x, яку вимірюють, до розміру одиниці вимірювання q_x чи кратної (часткової) одиниці:

$$N = E\left|\frac{x}{q_x}\right|, \qquad (1.1)$$

де $E|\bullet|$ - ціла частина відношення розмірів.

Як вже відмічалось, рівняння вимірювання (1.1) справедливе тільки для величин, які вимірюють за шкалою різниць і відношень. Для ординальних величин не виконується принцип рівноінтервальності відображення, і рівняння (1.1) несправедливе.

Значення величини за [5] - це відображення величини числовим значенням величини з позначенням її одиниці:

$$x = N_x[q_x], \qquad (1.2)$$

де q_x - позначення одиниці вимірювання.

В [1] формування поняття «значення величини» розповсюджуються і на ординальні величини, тому послідовність термінологічного зв'язку така: «значення величини» → «числове значення величини (рис. 1.3).

Значення величини за [1] - це розмір величини, поданий числом і посиланням.

Значення величини може бути виражене як:

- сукупність числа і одиниці або
- число для безрозмірнісної величини (одиницю один не пишуть);
- посилання на вимірювальну процедуру і ординальне число.

Приклади подання значення величини [1]:

- довжина предмета: 5.34 м або 534 см;
- температура за Цельсієм: - 5°C;
- електричний імпеданс для даного елемента кола і певної частоти: (7 +3j) Ом;
- індекс заломлення для зразка скла : 1.52;
- твердість зразка за Роквеллом С. (150 кг навантаження): HRC (150 кг) 43,5.

Числове значення величини за [1] - це число в поданні значення величини. Для величин з визначеною одиницею вимірювання числове значення [1] подають як:

$$\{Q\} = Q/[Q], \tag{1.3}$$

де Q - позначення величини, $[Q]$ - позначення одиниці величини.

В цьому разі рівняння (1.1) і (1.3) співпадають.

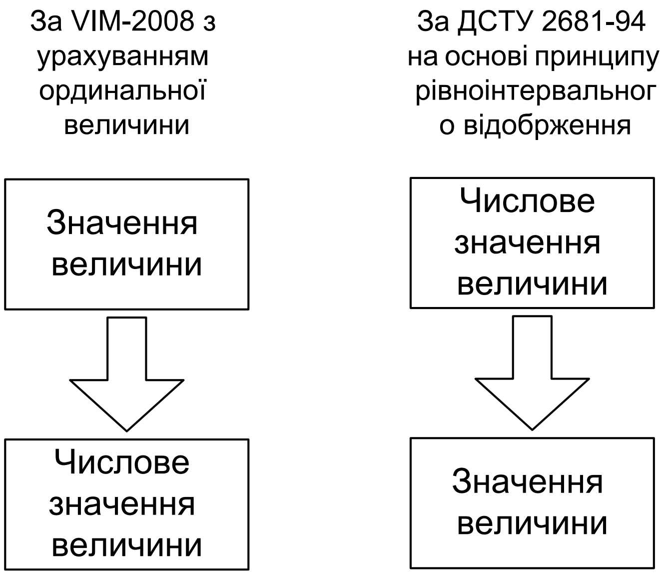


Рис. 1.3. Ілюстрація відмінності термінологічних зв'язків

В [1] наведено термін «загальноприйняте значення величини (conventional quantity value) як значення, що приписане формальною угодою величині для даних цілей.

Наприклад: стандартне прискорення вільного падіння $g = 9.80665\ \text{ìñ}^{-2}$.

В класичному підході до понять метрології використовуються терміни «істинне значення величини», «дійсне значення величини».

Істинне значення фізичної величини - значення $x_{\text{³ñò}}$, яке ідеально відображало б певну властивість об'єкту.

Дійсне значення фізичної величини або умовно істинне значення – значення $x_{\text{ä}}$, знайдене за експериментом і настільки наближене до істинного значення, що його можна використати замість істинного значення для даної мети.

В класичному підході істинне значення використовують для опису вимірюваної величини. Істинне значення можна було б отримати при ідеальному вимірюванні при відсутності похибок вимірювання. Але на практиці істинне значення отримати неможливо. Тому при необхідності замість істинного використовують дійсне значення.

Можливість кількісного подання величини її значенням дозволяє записувати формальні рівняння зв'язку між величинами [1]. Наприклад:

$$Q = \alpha Q_1 Q_2 \text{ або } \{Q\}[Q] = \alpha\{Q_1\}[Q_1]\{Q_2\}[Q_2] \text{ або } \{Q\}[Q] = \alpha\{Q_1\}\{Q_2\}[Q_1][Q_2] \quad (1.4)$$

де $\{Q\}, \{Q_1\}, \{Q_2\}$ - позначення числових значень величин Q, Q_1, Q_2 відповідно виражених в одиницях $[Q]$, $[Q_1], [Q_2]; \alpha$ - числовий множник.

На основі (1.4) можуть бути отримані рівняння зв'язку між одиницями і рівняння зв'язку між числовими значеннями величин:

$$[Q] = [Q_1][Q_2];$$

$$\{Q\} = \{Q_1\}\{Q_2\};$$

за умовою, що одиниці $[Q_1], [Q_2]$ когерентні.

1.7. Вимірювання, види вимірювань.

Вимірювання за [5] - відображення фізичних величин їхніми значеннями за експериментом та обчислюваннями з застосуванням спеціальних технічних засобів.

Вимірювання за [1] - процес експериментального отримання інформації має на увазі вимірювальну процедуру, що заснована на теоретичній моделі. На практиці вимірювання припускає наявність каліброваного засобу вимірювання.

Вимірювання можуть бути класифіковані за наступними ознаками:

- за характеристиками точності - рівноточні, нерівноточні;
- за кількістю вимірювань однієї і тієї ж вимірюваної величини - одноразові, багаторазові;

- в залежності від змін вимірюваної величини - статичні, динамічні;
- за поданням результату вимірювання - абсолютні, відносні;
- за загальними прийомами отримання результату вимірювань - безпосередні, опосередковані, сукупні, сумісні.

Рівноточні вимірювання - ряд вимірювань будь-якої величини, виконаних однаковими за точністю засобами вимірювання в одних і тих же умовах.

Нерівноточні вимірювання - ряд вимірювань будь-якої величини, виконаних декількома різними за точністю засобами вимірювання та (або) в різних умовах.

Одноразові вимірювання - вимірювання, що виконують один раз. Іноді для більшої впевненості в результаті вимірювання, що отримують, виконують два, три і більше вимірювань однієї і тієї ж величини. Але як результат вимірювання використовують тільки результат одного з них, і вимірювання вважають одноразовим.

Багаторазове вимірювання - вимірювання однієї і тієї ж величини, результат якого отриманий за рядом послідовних вимірювань; тобто таке, що складається з ряду одноразових вимірювань.

Статичне вимірювання - вимірювання величини, яку можна вважати незмінною за час вимірювання.

Динамічне вимірювання - вимірювання величини, що змінюється за час вимірювання.

Поняття абсолютного вимірювання було введене з наступним визначенням: вимірювання, що засноване на прямих вимірюваннях однієї чи декількох основних величин і (або) використанні фізичних констант Але за теперішнього часу поняття «абсолютне вимірювання» використовують як протилежне поняттю «відносне вимірювання», тобто вимірювання розмірнісної величини.

Відносне вимірювання - вимірювання відношення величини до однорідної величини, що відіграє роль одиниці, або зміни величини по відношенню до однорідної величини, що приймають як вихідну.

Безпосереднє вимірювання - вимірювання, за яким значення вимірюваної величини отримують безпосередньо з експериментальних даних.

Опосередковане вимірювання - вимірювання, за яким значення вимірюваної величини знаходять на основі відомої залежності між цією величиною і іншими величинами, що вимірюють безпосередньо.

Прикладом опосередкованого вимірювання є вимірювання густини ρ однорідного тіла циліндричної форми за значеннями маси m, висоти h і діаметра циліндра d, отриманих за вимірюваннями і пов'язаних рівнянням між величинами:

$$\rho = \frac{m}{0.25\pi d^2 h}.$$

Сукупні вимірювання - вимірювання декількох однорідних величин, за яких значення цих величин отримують розв'язанням системи рівнянь, що пов'язують різні сполучення цих величин, які вимірюються безпосередньо чи опосередковано.

Прикладом сукупного вимірювання є визначення маси окремих гирь за результатами вимірювання маси різних сполучень гирь.

Сумісні вимірювання - вимірювання декількох різнорідних величин, за яких значення цих величин отримують розв'язанням системи рівнянь, що пов'язують їх з іншими величинами, які вимірюються безпосередньо чи опосередковано.

Прикладом сумісного вимірювання є вимірювання коефіцієнтів лінійного розширення певного зразка на основі ряду вимірювань змін довжини цього зразка в залежності від змін його температури.

1.8. Результат вимірювання, невизначеність вимірювання.

Результат вимірювання за [5] - значення величини, отримане за вимірюванням.

Результат вимірювання завжди супроводжується характеристикою його невизначеності.

Результат вимірювання за [1] - це інформація про розмір величини, отримана експериментально.

Якщо інформація включає ряд значень, що належать вимірюваній величні, вони звичайно підсумовуються до єдиного значення величини з відповідною невизначеністю. Єдине значення величини є оцінкою, частіше середнім або медіаною ряду.

Якщо виміряну величину можна описати одним значенням величини, то в звичайній практиці «результат вимірювання» оцінюють тільки по одному значенню. Невизначеність, що приєднується до «результату вимірювання», тоді встановлюють окремо.

Якщо невизначеністю можна знехтувати для певних цілей, то інформація може бути зменшена до одного значення величини. В багатьох випадках це найбільш загальний шлях подання результату вимірювання

Невизначеність вимірювання [1] - це параметр, що характеризує розсіювання значень величини, які є атрибутом вимірюваної величини, і базується на використаній інформації.

Невизначеність вимірювання характеризує кількісно знання про вимірювану величину.

Невизначеність вимірювання характеризує дисперсію ряда або розподілу значень вимірюваної величини, отриманих з наявної інформації. Це розсіювання обумовлено невизначеністю поняття вимірюваної величини і випадковими і систематичними ефектами вимірювання.

Якщо єдине значення величини, отримане як оцінка вимірюваної величини, змінюється, то приєднана невизначеність вимірювання може також змінитись.

Цей параметр може бути, наприклад, середнім квадратичним відхиленням, що називають стандартною невизначеністю (або кратним їй), або півшириною інтервалу для встановленої покривної ймовірності.

Невизначеність вимірювання включає, у загальному випадку, багато складових (рис. 1.4). Декотрі з цих складових можуть бути визначені оцінюванням невизначеності вимірювання типу А зі статистичного розподілу значень величини ряду вимірювань, і можуть бути охарактеризовані експериментальним середнім квадратним відхиленням. Інші складові, що можуть бути визначені оцінюванням невизначеності вимірювання типу В, можуть бути також охарактеризовані середніми квадратичними відхиленнями, отриманими за розподілами ймовірності, виходячи з досвіду чи з іншої інформації.

Зрозуміло, що значення величини в результаті вимірювання це найкраща оцінка значення вимірюваної величини, і, що всі складові невизначеності вимірювання, включаючи ті, що виникають від систематичних ефектів (такі, як складові, що пов'язані з корекцією і приписаними значеннями вимірювальних еталонів), роблять внесок в розсіювання.

В залежності від очікуваного використання, розширена невизначеність результату вимірювання може бути отримана з встановленим покривним фактором, який забезпечує покривний інтервал, що вміщує значення вимірюваної величини з високою ймовірністю, або включає встановлену велику частину розсіяних значень величини, що є атрибутом вимірюваної величини.

Невизначеність поняття вимірюваної величини за [1] складова невизначеності вимірювання від обмеженої кількості деталей у визначенні вимірюваної величини. Зміни деталей у визначенні вимірюваної величини, що стосуються рівняння вимірювання, призводять до нової вимірюваної величини і до нової оцінки невизначеності поняття вимірюваної величини. Визначення вимірюваної величини - це перший крок процедури вимірювань. Оцінку невизначеності поняття вимірюваної величини треба розглядати як частину невизначеності вимірювання, що є нижньою границею невизначеності вимірювання.

Складова невизначеності від недосконалості процедури вимірювання включає в свою чергу складову, що обумовлена взаємодією засобу вимірювання з об'єктом вимірювання і складову невизначеності, що обумовлена неточністю засобу вимірювання (інструментальну невизначеність [1]).

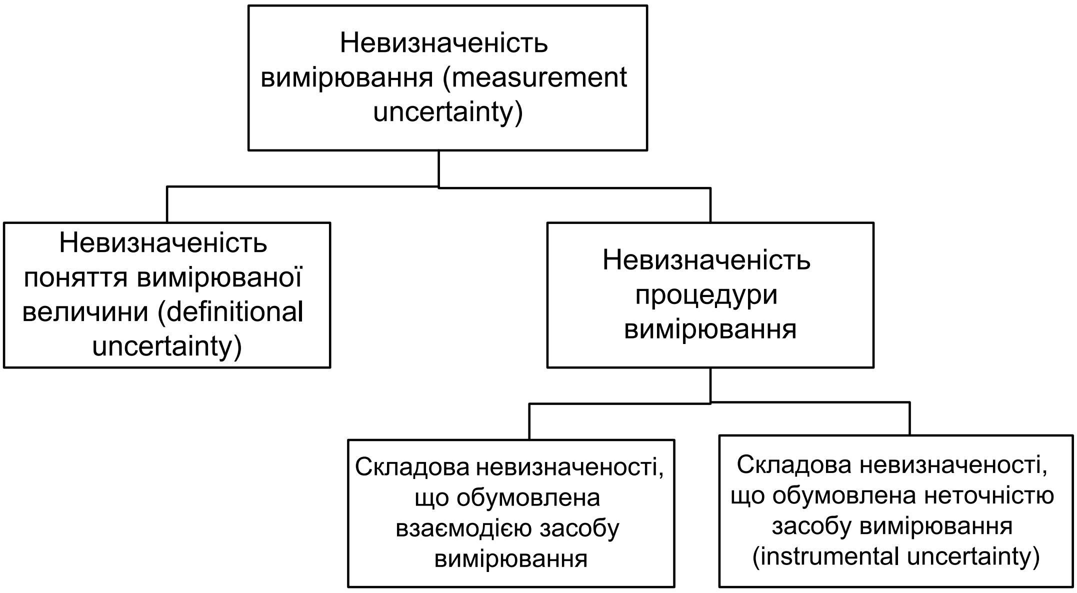


Рис. 1.4. Систематизація складових невизначеності.

За формою подання складові невизначеності можуть бути як абсолютними (в одиницях вимірюваної величини), так і відносними.

За способом оцінювання складові невизначеності розподіляються на складові з оцінюванням типу А, що ґрунтується на статистичному аналізі багаторазових вимірювань, і складові з оцінюванням типу В, що не використовує статистичний аналіз, а ґрунтується на експерименті та експертних знаннях.

За параметром, що характеризує розсіяння результатів вимірювання кожна складова невизначеності може бути визначена як стандартна невизначеність чи як розширена невизначеність.

При плануванні вимірювального експерименту, складанні типової методики вимірювань використовується задана або цільова невизначеність. Ціль вимірювання визначається сукупністю вимог до вимірювання, на її основі конкретизується об'єкт дослідження, формується концепція вимірюваної величини і визначається необхідна невизначеність (target uncertainty [1]). Це невизначеність вимірювання, сформована як ціль за призначенням і використанням результату вимірювання.

1.9. Процедура вимірювання, вимірювальні операції.

Процедура вимірювання за [5] - послідовність вимірювальних операцій, що забезпечує вимірювання у відповідності з обраним методом.

Вимірювальна операція - операція з величинами чи їх значеннями в процесі вимірювання. Мінімальний набір вимірювальних операцій для реалізації процедури вимірювання - це операції відтворення і порівняння.

Відтворення (фізичної величини) - вимірювальна операція, що полягає у створенні та (чи) зберіганні величини заданого значення.

Порівняння (фізичних величин) - вимірювальна операція, що полягає у відображенні співвідношення між розмірами двох однорідних величин відповідним висновком: більша, менша чи однакова за розміром.

Якщо еталонна (відтворювана) і вимірювана величини не узгоджені за розміром і родом, виникає необхідність у ще однієї вимірювальній операції - вимірювальному перетворенні.

Вимірювальне перетворення (величини) - вимірювальна операція, за якої вхідна величина перетворюється в вихідну, функціонально з нею пов'язану.

Принципом вимірювального перетворення називають фізичний ефект, на якому воно засновано.

Вимірювальні перетворення розділяють на вимірювальні перетворення зі зміною роду величини і без зміни роду величини, які в свою чергу поділяються на лінійні і нелінійні.

Масштабним вимірювальним перетворенням називають лінійне вимірювальне перетворення вхідної величини без перетворення її роду.

Процедура вимірювання за [1] - детальний опис вимірювання у відповідності з одним або більше принципами вимірювання і з використанням даного методу вимірювання.

1.10. Засоби вимірювальної техніки.

Засіб вимірювальної техніки (ЗВТ) за [5] технічний засіб, який застосовується під час вимірювань і має нормовані метрологічні характеристики.

До засобів вимірювальної техніки відносять засоби вимірювань і вимірювальні пристрої.

Засіб вимірювання - ЗВТ, який реалізує процедуру вимірювань.

Вимірювальний пристрій - ЗВТ, в якому виконується лише одна за складових частин процедури вимірювання (вимірювальна операція). Вимірювальні пристрої - це міра, компаратор, вимірювальний перетворювач, масштабний вимірювальний перетворювач та обчислювальний компонент.

Міра - вимірювальний пристрій, що реалізує відтворення та (або) збереження фізичної величини заданого значення.

Прикладом мір є штрихова міра довжини, кварцевий генератор - міра частоти електричних коливань.

Міри підрозділяють на однозначні, багатозначні, набори мір, магазини мір. Однозначна міра - міра, що відтворює фізичну величину одного значення. Однозначна міра може бути регульованою і нерегульованою.

Багатозначна міра - міра, що відтворює фізичну величину з багатьма значеннями. Приклад - штрихова міра довжини.

Набір мір - комплект мір різного значення однієї і тієї ж величини. Приклад - набір гирь.

Магазин мір - набір мір, об'єднаних конструктивно в єдиний пристрій, з пристосуваннями для їх використання в різних сполученнях.

Компаратор - вимірювальний пристрій, що реалізує порівняння однорідних фізичних величин. Приклад: важільні ваги (на одну чашу яких встановлюється зразкова гиря, а на другу об'єкт) є засобом для порівняння їх мас.

Вимірювальний перетворювач - вимірювальний пристрій, що реалізує вимірювальне перетворення. Приклад: термоелектричний перетворювач (термопара).

Масштабний вимірювальний перетворювач - вимірювальний перетворювач, призначений для зміни розміру величини. Приклад: трансформатор напруги.

Первинний вимірювальний перетворювач, сенсор - вимірювальний перетворювач, що першим взаємодіє з об'єктом вимірювання.

Обчислювальний компонент (засобу вимірювання), числовий вимірювальний перетворювач - вимірювальний пристрій, що є сукупністю засобів обчислювальної техніки і програмного забезпечення, який виконує обчислювальні операції при вимірюванні.

До засобів вимірювання (ЗВ) відносяться кодові ЗВ, реєструвальні ЗВ, вимірювальні прилади, вимірювальні канали і вимірювальні системи.

Засоби вимірювань реалізують процедуру вимірювання і створюють сигнали вимірювальної інформації. Сигнал вимірювальної інформації в залежності від адресата може бути візуальним (призначеним для людини оператора) і кодовим (призначеним для сприйняття технічними пристроями). За видом сигналу вимірювальної інформації засоби вимірювання поділяють на вимірювальні прилади, кодові засоби вимірювань і реєструвальні засоби вимірювань.

Вимірювальний прилад - засіб вимірювання, в якому створюється візуальний сигнал вимірювальної інформації.

Вимірювальні прилади можуть бути аналоговими і цифровими.

Аналоговий вимірювальний прилад - вимірювальний прилад, в якому візуальний сигнал вимірювальної інформації подається за допомогою шкали та вказівника.

Цифровий вимірювальний прилад - вимірювальний прилад, в якому сигнал вимірювальної інформації подається у вигляді цифр чи символів на показувальному пристрої.

Кодовий засіб вимірювання (аналого-цифровий перетворювач) - ЗВ, в якому створюється кодовий сигнал вимірювальної інформації.

Реєструвальний засіб вимірювання - ЗВ, в якому реєструється сигнал вимірювальної інформації.

Засоби вимірювань і вимірювальні пристрої можуть об'єднуватись в вимірювальні системи.

Вимірювальна система - сукупність вимірювальних каналів, вимірювальних пристроїв та інших технічних засобів, об'єднаних для створення сигналів вимірювальної інформації про декілька вимірювальних величин.

Вимірювальний канал - сукупність засобів вимірювальної техніки, засобів зв'язку та інших технічних засобів, призначених для створення сигналу вимірювальної інформації про одну вимірювану фізичну величину.

Вимірювальна інформаційна система - сукупність ЗВТ, засобів контролю, діагностування і інших технічних засобів, об'єднаних для створення сигналів вимірювальної та інших видів інформації.

В вимірювальній практиці використовуються пристрої або речовини, які при наявності певної властивості чи явища створюють сигнал вимірювальної інформації. Такі пристрої називаються індикаторами. Вони не відносяться до ЗВТ, хоч деякі ЗВТ можуть бути використані як індикатори

В сучасних ЗВТ широко використовуються засоби обчислювальної техніки. Мікропроцесори і мікро-ЕОМ вбудовуються в найбільш складні та точні засоби вимірювальної техніки, щоб виконати попередню обробку інформації, поліпшити метрологічні характеристики, спростити системні зв'язки та обслуговування. В багатодіапазонних цифрових вольтметрах, наприклад, мікропроцесор забезпечує наступні автоматичні операції: вибір діапазону вимірювань, корекцію нуля, калібровку вимірювальних кіл, самоперевірку, порівняння з уставками, введення поправок, статистичну обробку результатів вимірювань.

Застосування засобів обчислювальної техніки і сучасних інтелектуальних інформаційних технологій стало основою створення таких сучасних ЗВТ, які отримали назву - інтелектуальні засоби вимірювальної техніки (ІЗВТ). ІЗВТ - засіб вимірювальної техніки, що вміщує бази даних і знань, які використовуються як при виконання процедури вимірювання повністю, так і при виконанні окремих вимірювальних операцій за допомогою системи оптимізуючих правил, що приймає рішення, визначає власну поведінку, контролює свою роботоспроможність, що самонавчається і спілкується з людиною-оператором.

1.11. Методи вимірювань.

Методи вимірювань далі будуть класифіковані у відповідності з їх суттєвими ознаками.

Метод вимірювання - це сукупність способів використання засобів вимірювальної техніки та принципу вимірювань для створення вимірювальної інформації [3].

Принцип вимірювання - наукова основа метода вимірювання.

Першою ознакою методів вимірювань є кількість етапів використання засобів вимірювальної техніки. У відповідності з цією ознакою методи поділяють на:

- одноетапні (зіставлення);
- багатоетапні (зрівноваження).

Другою ознакою обирають використання однозначних чи багатозначних мір і масштабних перетворювачів.

При реалізації одноетапних методів (зіставлення) використовується багатозначна нерегульована міра (БНМ) і багатоканальний компаратор (БК) чи однозначна нерегульована міра (ОНМ), багатоканальний масштабний перетворювач (БМП) і компаратор.

1.11.1. Метод зіставлення.

Метод зіставлення - метод вимірювання з одноразовим порівнянням вимірюваної величини з усіма вихідними величинами багатозначної нерегульованої міри. Приклад: вимірювання довжини лінійкою з поділками; вимірювання часу годинником.

Цей метод забезпечує максимальну швидкодію вимірювання, наприклад, довжини, електричної напруги, механічних величин. Структурна схема засобу вимірювань (ЗВ), що реалізує цей метод, наведено на рис 1.5.

Результат вимірювання визначають у відповідності з номером каналу i компаратора (К), для якого різниця $|x - iq_k|$ мінімальна, де q_k - ступінь квантування або ціна поділки багатозначної нерегульованої міри (БНМ). Рівняння вимірювання за схемою рис. 1.5 таке:

$$x = iq_k = E\left|\frac{x}{q_k} + 0.5 sign\, x\right| \cdot q_k .$$

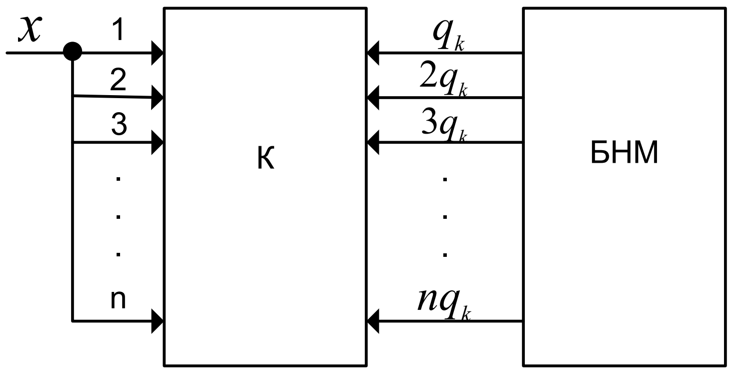


Рис. 1.5. Структурна схема ЗВ, що реалізує метод зіставлення.

Другий варіант методу зіставлення може бути реалізований за допомогою багатозначного масштабного перетворювача (БМП) рис. 1.6.

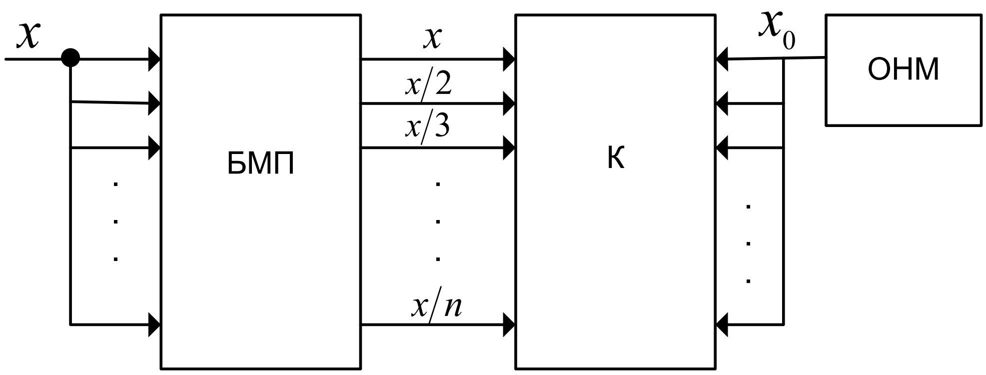


Рис. 1.6. Структурна схема ЗВ, що реалізує обернений метод зіставлення.

Результат вимірювання визначається у відповідності з номером i компаратора, для якого різниця $\left|\frac{x}{i} - x_0\right|$ мінімальна, де x_0 - зразкова величина, що відтворюється однозначною нерегульованою мірою (ОНМ).

Рівняння вимірювання за схемою рис. 1.6 таке:

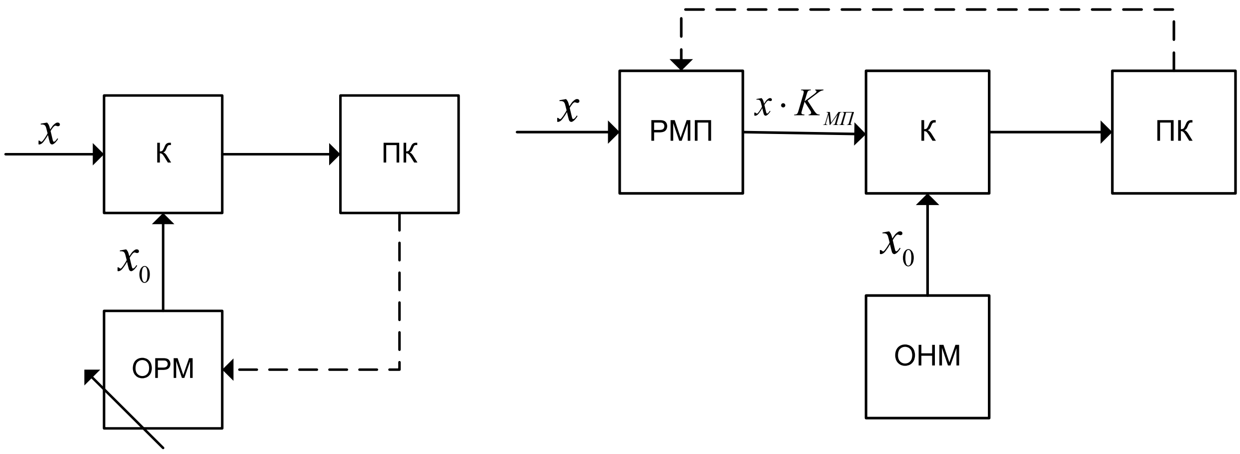
$$x = ix_0 = E\left|\frac{x}{x_0} + 0{,}5 sign\, x\right| \cdot x_0 .$$

Недолік цього методу полягає в наступному: нормованою характеристикою кожного каналу БМП є коефіцієнт перетворення $K_I = 1/i$ і в цьому випадку залежність між x і K_I буде нелінійною (оберненою): $x = x_0/K_I$.

1.11.2. Метод зрівноваження.

При реалізації методу зрівноваження можуть бути використані однозначна регульована міра (ОРМ) або регульований масштабний перетворювач (РМП). Структурні схеми ЗВ, що реалізують метод зрівноваження, наведено на рис. 1.7.

Метод зрівноваження з регульованою мірою - метод вимірювання з багаторазовим порівнянням вимірюваної величини та регулюванням, що відтворюється мірою, до їх повного зрівноваження (рис. 1.7 а).



а) б)

Рис. 1.7. Структурні схеми ЗВ, що реалізують метод зрівноваження (ПК-пристрій керування).

Метод зрівноваження з регульованим масштабним перетворювачем (РМП) - метод вимірювання з багаторазовим порівнянням величини, що відтворюється мірою, і вимірюваної величини, що пройшла крізь регульований масштабний перетворювач, коефіцієнт перетворення якого змінюється до зрівноваження порівнюваних величин (рис. 1.7 б).

1.11.3. Метод одного збігу, метод Ноніуса.

Недоліком методу зіставлення є те, що похибка вимірювання при реалізації цього методу не може бути меншою за половину поділки або ступеня багатозначної нерегульованої міри. Для підвищення точності використовують апаратурну надлишковість, тобто замість однієї багатозначної міри використовують дві, ціна поділки яких дещо відрізняється.

Метод одного збігу (метод Ноніуса) - метод вимірювання з одноразовим порівнянням величин двох багатозначних нерегульованих мір, з різними за значеннями ступенями (поділками), нульові позначки яких зсунуті між собою на вимірювану величину. Розглянемо приклад методу Ноніуса. Припустімо, що потрібно виміряти довжину виробу x, яка є меншою за довжину поділки q_k багатозначної міри. Точки початку відліку міри і виробу суміщають, а до довжини x додають другу багатозначну міру з довжиною поділки $q_k\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Знаходимо точку приблизного збігу двох величин iq_k та $iq_k\left(1-\frac{1}{n}\right)+x$:

$$iq_k = iq_k\left(1-\frac{1}{n}\right)+x \qquad (1.5)$$

звідки отримуємо

$$x = i\frac{q_k}{n}.$$

Таким чином, при застосування двох багатозначних мір ми отримуємо такий же ефект, як і при застосуванні однієї багатозначної міри є довжиною поділки q_k/n. Число n обирають зазвичай з ряду 10; 100; 1000 і т.д.

Приклад. Нехай невідома довжина виробу дорівнює 0,6 мм. Використаємо одну багатозначну міру з довжиною поділки 1 мм, а другу з довжиною поділки 0,9 мм. В цьому випадку число i, що відповідає збігу буде дорівнювати:

$$i = \frac{n \cdot x}{q_k} = 6 .$$

Дійсно, якщо підставити в (1.5) значення i, отримуємо

$$6 \cdot 1\text{ìì} \ = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)\text{ìì} \ + 0.6\ \text{ìì} \ .$$

1.11.4. Диференційний метод вимірювання.

Диференційний метод вимірювання - метод вимірювання, за яким невелика різниця між вимірюваною величиною та вихідною величиною однозначної міри вимірюється відповідним засобом вимірювання.

Структурна схема ЗВ, що реалізує диференційний метод вимірювання, наведена на рис. 1.8, де ОНМ - однозначна нерегульована міра, ПР - пристрій для отримання різниці величин.

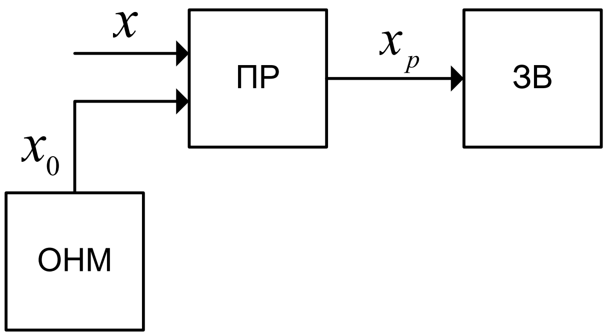


Рис. 1.8. Структурна схема ЗВ, що реалізує диференційний метод вимірювання.

За показом ЗВ отримують значення різниці x_p, тоді

$$x = x_0 + x_p .$$

Виходячи з визначення даного методу вважаємо, що $x_p << x$. Ця вимога обумовлена наступним. Абсолютна похибка вимірювання x складається з абсолютної похибки вихідної величини міри $\Delta(x_0)$ і абсолютної похибки вимірювання різниці $\Delta(x_p)$, тобто

$$\Delta(x) = \Delta(x_0) + \Delta(x_p) .$$

Відносна похибка $\delta(x)$ вимірювання x дорівнює:

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \frac{\Delta(x_0)}{x} + \frac{\Delta(x_p)}{x}.$$

Перша складова похибки за умов близькості x і x_0 дорівнює:

$$\frac{\Delta(x_0)}{x} \approx \frac{\Delta(x_0)}{x_0} = \delta(x_0),$$

де $\delta(x_0)$ - відносна похибка ОНМ.

Друга складова дорівнює:

$$\frac{\Delta(x_p)}{x} = \frac{\Delta(x_p)}{x_p} \cdot \frac{x_p}{x} = \delta(x_p) \cdot \frac{x_p}{x},$$

де $\delta(x_p)$ - відносна похибка ЗВ.

Таким чином, якщо різниця невеличка, тобто $x_p << x$, похибка вимірювання, обумовлена неточністю ЗВ, що вимірює різниці, значно зменшується.

1.11.5. Метод заміщення.

Метод заміщення за принципом отримання значення вимірюваної величини аналогічний методу зрівноваження з тою відмінністю, що вимірювана величина і вихідна величина міри діють на вході ЗВ неодночасно. А саме, на вхід ЗВ діє спочатку вимірювана величина, потім її відключають і заміщують вихідною величиною однозначної регульованої міри (ОРМ). Тоді за значенням вихідної величини ОРМ (за умов повного заміщення) отримують значення вимірюваної величини.

Визначення методу заміщення за [5] таке. Метод заміщення - метод вимірювання з багаторазовим порівнянням до повного зрівноваження вихідних величин вимірювального перетворювача з почерговим перетворенням ним вимірюваної величини та вихідної величини однозначної регульованої міри.

1.12. Похибки вимірювання.

При розробці концепції невизначеності в [9] були вилучені такі терміни: «істинне значення» і «похибка вимірювання», що визначалась як різниця, між значенням величини, отриманим при вимірюванні, та істинним значенням вимірюваної величини. Окремі похибки розглядались як складові невизначеності. Потрібно зазначити, що такий підхід відрізнявся від прийнятого раніше в метрології. Тому багато вчених метрологів виступали на захист «істинного значення» і детально розробленої теорії похибок вимірювання. Невизначеність розглядалась лише як характеристика точності кінцевого результату вимірювання. Враховуючи це в документі [1] терміни, що стосуються «істинного значення» показані в двох варіантах: «класичному» і в тому, що найбільш відповідає концепції невизначеності.

За «класичним» підходом істинне значення, це значення, що ідеальним чином відображає з кількісного і якісного боку властивості об’єкта. Зазвичай воно невідоме, і для практичних цілей істинне значення заміняють дійсним значення, яке наближене до істинного значення настільки, що може бути прийняте замість нього.

За іншим підходом [1] істинне значення величини (true quantity value) це значення, що узгоджене з визначенням величини.

Наприклад, фундаментальні константи є величинами, що мають єдине істинне значення. Істинне значення, що приймають за домовленістю для даних цілей називають загальноприйнятим значенням величини (conventional quantity value).

Для характеристики якості вимірювання використовують поняття «точність вимірювання», «правильність вимірювання», «збіжність результатів вимірювань», «відтворюваність вимірювань».

Точність вимірювання згідно [5] і «класичного» поді ходу [1] це - близькість між значенням величини, отриманим при вимірюванні, і істинним значенням вимірюваної величини. Точність не може бути виражена числовим значенням. Поняття точності стосується як систематичних, так і випадкових похибок.

Правильність вимірювання [5] - це близькість середнього значення, що отримане на основі декількох значень вимірюваної величини при визначених умовах вимірювання, до істинного значення вимірюваної величини. За [1 правильність вимірювання (measurement trueness) – це близькість середнього значення, що отримане на основі декількох значень вимірювань величини, і опорним (рекомендованим, довідковим) значенням величини (reference quantity value). Правильність не може бути виражена числовим значенням. Правильність відноситься тільки до систематичних похибок.

Збіжність результатів вимірювань відображає близькість до нуля випадкової похибки.

Відтворюваність вимірювання за [5] - це характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї і тієї ж величини, виконаних в різних умовах (в різний час, в різних місцях, різними методами і засобами).

Похибка вимірювання за [5] - це різниця між значенням величини, отриманим при вимірюванні, і істинним значенням вимірюваної величини.

Таке визначення співпадає з визначенням абсолютної похибки вимірювання:

$$\Delta = x - x_{іст} \qquad (1.6)$$

де Δ - абсолютна похибка вимірювання, x - значення величини, отримане при вимірюванні, $x_{іст}$ - істинне значення вимірюваної величини.

Відносна похибка вимірювання - відношення абсолютної похибки вимірювання до істинного значення вимірюваної величини.

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{іст}} = \frac{x}{x_{іст}} - 1 \qquad (1.7)$$

Відносну похибку подають або за відносними одиницями, або у выдсотках. Оскільки істинне значення невідоме, то при практичному оцінюванні похибки за формулою (1.7) його замінюють дійсним значенням. Крім того, на практиці використовують номінальну відносну похибку:

$$\delta_{í} = \frac{\Delta}{x},\ x \neq 0.$$

Різниця між δ і $\delta_{í}$ невелика і дорівнює:

$$\delta - \delta_{í} = \frac{\Delta}{x_{зñð}} - \frac{\Delta}{x} = \delta \cdot \delta_{í}\ .$$

Ця різниця - величина вищого порядку малості і різко зменшується з підвищенням точності. Наприклад, якщо $\delta = 0{,}01 = 1\%$, тоді $\delta - \delta_{í} \approx 10^{-4} = 0{,}01\%$.

Порівняльною характеристикою точності засобів вимірювальної техніки служить зведена похибка, що визначається відношенням:

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_{í}}\ ,$$

де $x_{í}$ - нормоване значення, вибір якого регламентовано стандартами.

Похибки вимірювання і засобів вимірювальної техніки систематизують у відповідності з їх ознаками (рис. 1.9), що визначають їх основі особливості.

Рис. 1.9. Класифікація похибок вимірювання.

За способом подання похибки розділяють на абсолютні та відносні (формули (1.6) і (1.7)).

За характером зміни похибки підрозділяють на систематичні і випадкові.

Систематична похибка (вимірювання) за [5] і [1] - це складова похибки, що залишається сталою або прогнозовано змінюється в ряді вимірювань однієї і тієї ж величини. Систематична похибка і її причини можуть бути відомими або невідомими. Якщо систематична похибка відома, то може бути здійснена її корекція.

Випадкова похибка (вимірювання) за [5] і [1] - це складова похибки, що непрогнозовано змінюється в ряді вимірювань однієї і тієї ж величини.

За залежністю абсолютної похибки від вимірюваної величини похибки розділяють на адитивні і мультиплікативні.

Адитивна похибка - це складова абсолютної похибки, що не залежить від вимірюваної величини.

Мультиплікативна похибка - це складова абсолютної похибки, яка лінійно залежить від вимірюваної величини. Якщо залежність абсолютної похибки від вимірюваної величини більш складна, ніж лінійна, аналізу підлягають нелінійні складові похибки.

За режимом вимірювання похибки поділяють на статичні і динамічні.

Статична похибка - це похибка статичного вимірювання, тобто похибка, що має місце при незмінній вимірюваній величині.

Динамічна похибка - це складова похибки, що виникає додатково до статичної під час динамічних вимірювань, тобто при змінах вимірюваної величини.

За причиною виникнення похибки підрозділяють на методичні та інструментальні.

Методична похибка (вимірювання) - це складова похибки вимірювання, що зумовлена невідповідністю об'єкта вимірювання його моделі, що прийнята при вимірюванні. Як приклад можна навести вимірювання кількості бензину Q в баку літака за рівнем h. Точна аналітична залежність невідома і її приймають лінійною $h = k \cdot Q$, що є причиною виникнення методичної похибки.

Інструментальна похибка (вимірювання) - складова похибки вимірювання, зумовлена властивостями засобів вимірювальної техніки. Інструментальна похибка обумовлена недосконалістю конструкції і технології виготовлення засобів вимірювальної техніки (ЗВТ), відхиленням від номінального значення і нестабільністю з часом параметрів елементів і вузлів ЗВТ чутливістю до зовнішніх дій і неінформативних параметрів вхідних сигналів, взаємодією ЗВТ з об'єктом вимірювання, динамічними властивостями ЗВТ.

Інструментальна похибка складається з похибки засобу вимірювання і похибки взаємодії засобу вимірювання з об'єктом вимірювання (рис. 1.10).

Похибка (вимірювання) від взаємодії - складова інструментальної похибки, що виникає внаслідок впливу засобу вимірювання на стан об'єкта вимірювання.

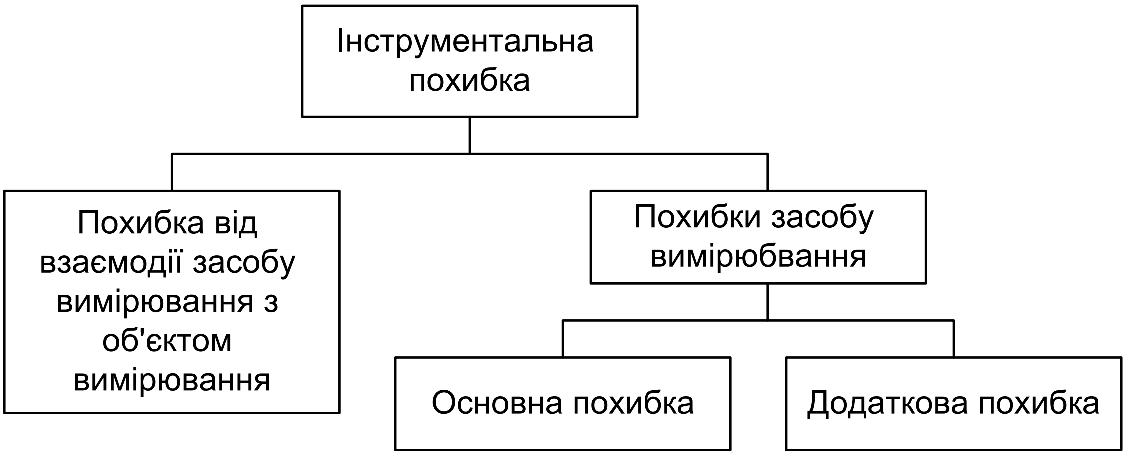


Рис. 1.10. Складові інструментальної похибки.

Похибка засобу вимірювання (абсолютна) - це різниця між показом засобу вимірювання та істинним значенням вимірюваної величини за умов відсутності методичних похибок і похибок від взаємодії засобу вимірювання з об'єктом вимірювання.

Наведемо приклад виникнення похибки від взаємодії засобу вимірювання з об'єктом вимірювання при вимірюванні електричного струму в колі (рис. 1.11).

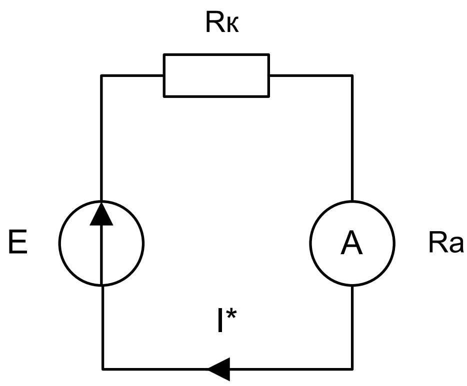


Рис. 1.11. Схема кола при вимірюванні електричного струму.

Вимірювана величина

$$I = \frac{E}{R_K}, \qquad (1.8)$$

де E – електрорушійна сила джерела живлення; R_K - опір кола.

Якщо для вимірювання струму в колі включити амперметр, тоді величина, що її буде вимірювати амперметр:

$$I^* = \frac{E}{R_K + R_a}. \qquad (1.9)$$

Відносна похибка від взаємодії визначається так:

$$\delta_{\hat{a}\c{c}} = \frac{I^*}{I} - 1 = -\frac{R_a}{R_{\hat{E}} + R_a} = -\frac{1}{1 + R_a/R_{\hat{E}}}.$$

Якщо амперметр ідеальний, тобто $R_a = 0$, тоді похибка від взаємодії $\delta_{\hat{a}\c{c}} = 0$. Щоб знехтувати похибкою від взаємодії, необхідно виконати наступну умову щодо опору амперметра: $R_a << R_{\hat{E}}$.

В свою чергу до похибки засобу вимірювання входять дві складові: основна похибка і додаткова похибка (рис. 1.10).

Основна похибка (засобу вимірювання) - похибка засобу вимірювання за нормальних умов його застосування.

Додаткова похибка (засобу вимірювання) - похибка засобу вимірювання яка додатково виникає під час використання засобу вимірювання за умов відхилення хоча б однієї з впливових величин від нормального значення або її виходу за границі нормальної області значень в межах робочих умов використання засобу вимірювання.

1.13. Процедури експериментальної інформатики.

В інтелектуальних засобах вимірювальної техніки (ІЗВТ) використовуються різні процедури експериментальної інформатики (ПЕІ). Важливим напрямком розвитку ІЗВТ і критеріїв їх якості є розвиток їх метрологічного забезпечення. Складність вирішення цієї задачі обумовлена різноманітністю ПЕІ, тому задача дослідження спільних елементів ПЕІ з метою створення загальної терміносистеми є дуже актуальною.

Робота по виявленню спільних елементів процедур експериментальної інформатики проводились у напрямках дослідження методик виконання ПЕІ, терміносистеми ПЕІ, інформаційних операцій, з яких складається ПЕІ. Як загальну основу для побудови спільної терміносистеми було обрано репрезентативну теорію вимірювань, пов'язану з теорією шкал. Об'єктом дослідження був зв'язок: прояви властивостей, що досліджуються, - шкала - відповідна ПЕІ (спостереження, лічба, контроль, вимірювання, діагностування, розпізнавання об'єктів, випробовування, експериментальне дослідження).

При аналізі процедур експериментальної інформатики були використані визначення, наведені в [2].

Спостереження - відображення властивості об'єкту або його стану словесним чи графічним описом.

Лічба - відображення кількісної властивості певної сукупності матеріальних якісно однорідних об'єктів числом. Основним інформативним параметром сукупності об'єктів, що еквівалентні за певною властивістю, є їх кількість або чисельність n, яка визначається їх лічбою. Якщо, в класах еквівалентності встановлені еталонні представники $q_{åò}$ тоді кількість еквівалентних об'єктів визначають за формулою:

$$n = \sum_{i=1}^{N} a_i \, ,$$

де $a_i = \begin{cases} 1 & \text{ÿêùî} \quad q_i \sim q_{åò} \\ 0 & \text{ÿêùî} \quad q_i \nsim q_{åò} \end{cases}$, q_i - властивість i - го об’єкта.

Контроль якості продукції - відображення логічним висновком відповідності характеристик продукції до наперед заданих норм та вимог, що зумовлюють її придатність задовольняти певні потреби згідно з призначенням.

Контроль технологічного процесу - відображення логічним висновком відповідності характеристик процесу виготовлення продукції до встановлених норм.

Технічний контроль - відображення логічним висновком відповідності технічних характеристик об'єкта встановленим нормам. Для реалізації процедури найпростішого технічного однопараметричного контролю необхідні еталонні величини: $x_{Н}$ - для нижньої границі норми та $x_{В}$ - для верхньої границі норми, а також пристрій порівняння.

Вимірювання - це відображення фізичної величини іменованим числом. При вимірюванні сукупність однорідних фізичних величин відображається сукупністю іменованих чисел, яка задовольняє відношенням еквівалентності, порядку і адитивності. Іменовані числа, що є результатами вимірювань, можуть використовуватись для будь яких математичних операцій.

Діагностування - відображення загального стану об'єкта та причин цього стану діагнозом з позначенням особливостей стану і локалізацією відхилень від норм.

Розпізнавання об'єктів - відображення даного об'єкта за сукупністю його властивостей - одним з класів множини цих об'єктів.

Випробування - відображення характеристик об'єктів чи їх фізичних моделей за певних умов функціонування значеннями характеристик, відповідним рішенням чи сертифікатом.

Експериментальне дослідження - відображення складного матеріального об'єкта або ситуації, що характеризується сукупністю взаємопов'язаних величин, системою відповідних моделей.

Інтелектуалізація наведених вище процедур експериментальної інформатики сприяє їх подальшому розвитку. Так, наприклад, ідентифікація, що не є сама по собі процедурою експериментальної інформатики (бо тільки використовує результати інших ПЕІ для відображення характеристик об'єкта характеристиками математичної моделі), у поєднанні з вимірюванням створює нову процедуру інтелектуального вимірювання - вимірювання залежностей.

Якщо експериментальне дослідження поєднати з науковим прогнозуванням, то можна отримати нову ПЕІ - моніторинг.

Зіставленню процедур експериментальної інформатики з метою визначення спільних елементів присвячений ряд робіт. В [11] проведено зіставлення процедур вимірювання і діагностування. Обидві ПЕІ починаються з побудови моделі об'єкта: метрологічної чи діагностичної, що відображає мету процедури, а також вибір параметрів, що підлягають визначенню. Метрологічна модель, це математична модель об'єкта, що враховує джерела похибок (модель об'єкта плюс модель похибок), а діагностична модель - це математична модель об'єкта, що враховує джерела дефектів (модель об'єкта плюс джерела дефектів). Модель повинна включати в явному вигляді метрологічні чи діагностичні параметри. В технічній діагностиці ці параметри називають безпосередніми і опосередкованими діагностичними ознаками, в метрології це властивості, що підлягають безпосереднім і опосередкованим вимірюванням.

Вибір сукупності метрологічних і діагностичних параметрів, що безпосередньо визначаються, є відповідальним етапом, від якого залежить якість і ефективність ПЕІ. Наприклад, до параметрів, що підлягають вимірюванню, встановлюють такі вимоги [11]: вимірюваність, інформативність, інваріантність.

Вимірюваність параметру означає, що він допускає можливість безпосереднього сприйняття за допомогою відповідного давача (швидкості, температури, тиску, тощо) і забезпечує можливість кількісного визначення характеристик об'єкта. Інформативність параметру означає, що він несе суттєву інформацію про властивості об'єкту. Інваріантність параметру означає, що він мало чутливий (в ідеалі - нечутливий) до шумів, завад і зовнішніх впливів.

Згідно [11] ПЕІ вимірювання і діагностування включають наступні загальні етапи:

- визначення об'єкта вимірювання (діагностування);
- визначення мети вимірювання (діагностування);
- визначення метрологічної (діагностичної) моделі;

- вибір вимірюваних (діагностичних) параметрів;
- вибір методу вимірювання (діагностування);
- вибір засобу вимірювання (діагностування);
- обробку отриманої інформації;
- подання результату вимірювання (діагностування).

Аналогічні етапи можуть бути визначені і в інших процедурах експериментальної інформатики. Але є цілий ряд паралелей, які не знайшли відображення в наведених вище етапах. Є багато спільного між набором стандартних метрологічних процедур (атестацією, повіркою, калібруванням) і набором діагностичних процедур (перевіркою справжності, дієздатності і правильністю функціонування). Крім того, і в метрології, і в технічній діагностиці має місце взаємодія між об'єктом дослідження і засобом вимірювання чи діагностування. І для засобу вимірювання, і для засобу діагностування важливо щоб при наявності взаємодії між об'єктом і засобом, що реалізує ПЕІ, не змінювався (або змінювався у незначній мірі) стан об'єкта, що досліджується.

В [12] проведені аналогії між методикою вимірювань і методикою випробувань. Ці аналогії корисні не тільки в термінологічному розумінні. Вони допомагають краще зрозуміти роль і місце вимірювань при розробці і використанні методик випробувань, взаємний зв'язок показників вірогідності результатів випробувань і показників точності результатів вимірювань (тобто похибок вимірювань), що виконуються при реалізації процедури випробувань.

Спільність процедур експериментальної інформатики можна підтвердити при поділі кожної процедури на операції, з яких вона складається. Різні процедури експериментальної інформатики мають спільні операції, з яких вони складаються. Крім того окремі процедури одних ПЕІ можуть входити до складу інших. Загальні операції ПЕІ - це відтворення, сприйняття, перетворення, порівняння, класифікація (рис. 1.12).

Операцію відтворення було визначено у метрології. Відтворення - це створення матеріального об'єкта, що характеризується фізичною величиною наперед заданого значення, за допомогою спеціального технічного засобу, що називається мірою. Якщо результати відтворення розглядати як спільну операцію ПЕІ, то відтворення набуває більш широкого змісту, але спільним залишається те, що кожний з відтворюваних елементів є частиною однієї зі шкал. Це видно на прикладі (рис. 1.12), де відтворюваними елементами для процедур вимірювання, контролю, багатопараметричного контролю є одиниця величини, норма, сукупність норм.

Порівняння для ПЕІ - це відображення подібності чи відмінності об'єктів логічним висновком. Операція порівняння є загальною практично для всіх ПЕІ. Наприклад, при вимірюванні порівнюються дві однорідних величин. При контролі (що включає попередні вимірювання) порівнюються значення величин (виміряне значення і норма). При багатопараметричному контролі порівнюються значення декількох величин, пов'язаних певними співвідношеннями. Результатом порівняння інформації про об'єкт з відповідним критерієм є оцінка стану об'єкта. Тому говорити про стан об'єкта можна тільки відносно відповідного критерію.

Сприйняття - це відображення найпростіших характеристик довколишнього середовища за допомогою органів почуття людини або спеціальних технічних засобів (сенсорами, індикаторами) сигналами, зручними для подальшого використання. Сприйняття при вимірюванні - це первинне вимірювальне перетворення.

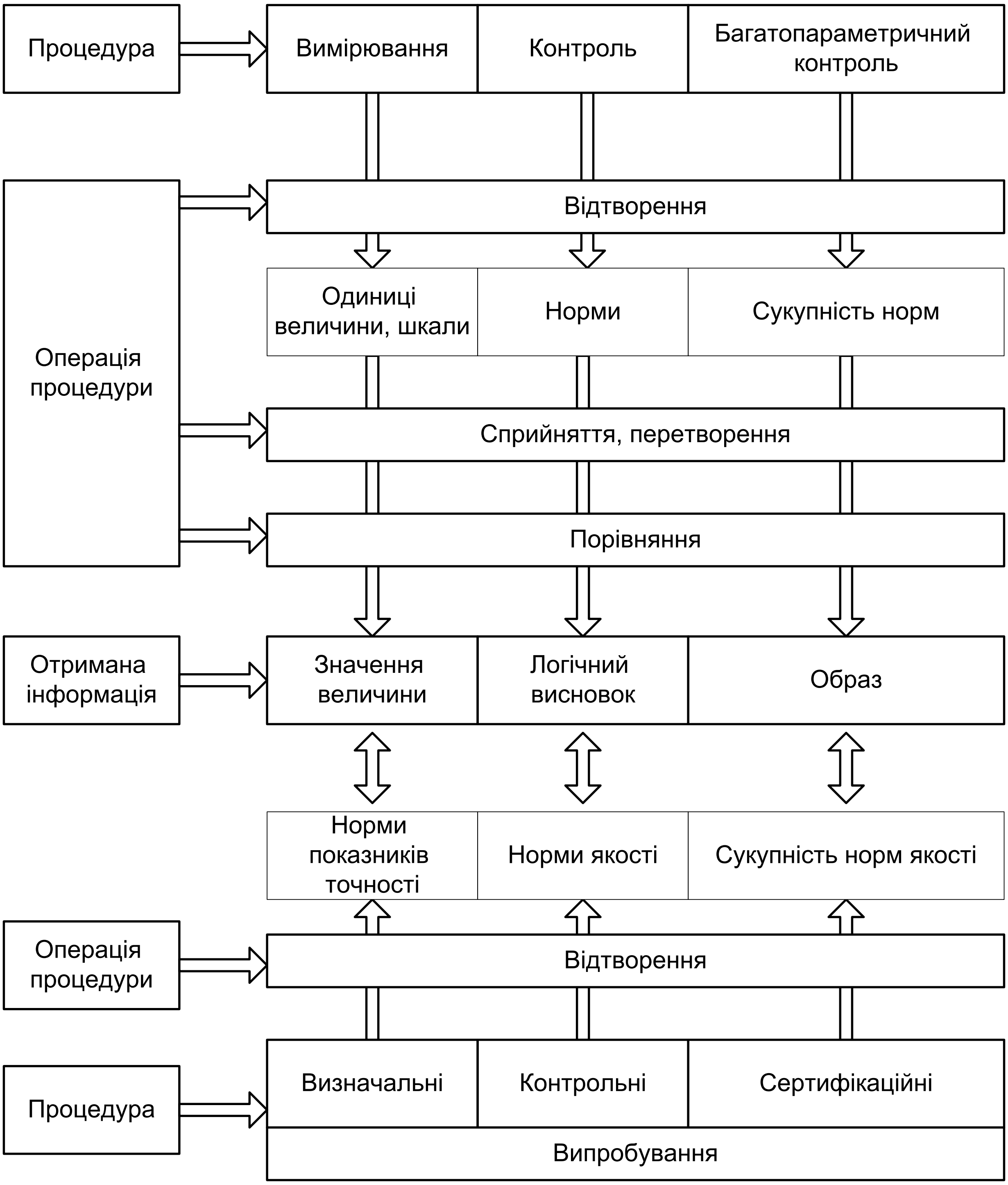


Рис. 1.12. Процедури експериментальної інформатики і їх спільні операції.

Операцію вимірювального перетворення було також визначено в метрології як перетворення роду і розміру величини. В ПЕІ перетворення включає в себе зміну форми чи фізичної природи носія інформації (підсилення, ослаблення, модуляція, маніпуляція тощо).

Класифікація - логічна операція розподілу об'єктів за класами, що пов'язані в систему і відрізняються певними ознаками.

Класифікація широко застосовується в інтелектуальних засобах вимірювання.

Засоби реалізації вимірювальних операцій (відтворення, порівняння, сприйняття, перетворення) повинні мати нормовані метрологічні характеристики. Завдяки цьому можуть бути визначені характеристики точності результату вимірювання. Це вимога метрологічних стандартів. Такі ж вимоги, по можливості, повинні бути розповсюджені і на засоби операцій інших процедур експериментальної інформатики, що є необхідною умовою для визначення показників якості ПЕІ і їх сертифікації.

1.14 . Шкали вимірювання і процедури експериментальної інформатики.

Побудова спільної методологічної основи процедур експериментальної інформатики розпочата із застосуванням теорії шкал. Для того, щоб пов'язати конкретні ПЕІ з конкретними шкалами розглянемо види шкал і їх особливості.

Згідно [4] шкала величини - це відповідність між об'єктами пізнання, що порівнюються у певних відношеннях (за певними властивостями) і числами чи системою позначень. Якщо така відповідність встановлена однозначно, то можна говорити про точки шкали як пари $< A_n, n >$, де A_n - клас еквівалентності об'єктів (розмір величини), а n - число, що йому відповідає.

Аналізу підлягають шість видів шкал: найменувань (номінальна), класифікації, порядку (ординальна), різниць (інтервалів), відношень (пропорційна), абсолютна [13].

Шкали найменувань характеризуються тільки відношенням еквівалентності різних якісних проявів властивостей. Тому в таких шкалах відсутнє поняття нуля і одиниці вимірювання. Як приклад можна навести шкали, призначені для вимірювання кольору (атласи кольорів), для яких не має сенсу відношення типу більше, менше.

Шкала класифікації характеризується групуванням подібних об'єктів і класифікацією (чи категоризацією) об'єктів за навчальними зразками чи згідно заданих правил.

Шкала порядку призначена для властивостей, у яких має сенс не лише відношення еквівалентності, але й відношення порядку згідно зростанню чи зменшенню кількісного прояву властивості. В таких шкалах нуль може бути, а може його й не бути. Для шкал порядку не встановлено відношення пропорційності, тому немає можливості сказати в скільки разів більші чи менші конкретні прояви властивості. Характерними прикладами шкал порядку є шкали твердості, балів землетрусу, балів сили вітру тощо. Різні варіанти шкал порядку для однієї і тієї ж властивості пов'язані між собою монотонними, нелінійними (найбільш часто) залежностями.

Шкали різниць (інтервалів) відрізняються від шкал порядку тим, що належним до них властивостям притаманне не тільки відношення еквівалентності і порядку, а й додавання та пропорційності інтервалів (різниць) між різними кількісними проявами властивості. Шкали різниць містять в собі умовні нулі-репери і одиниці вимірювання, встановлені за згодою. Наприклад, за шкалою інтервалів часу інтервали можна додавати (віднімати) і порівнювати - знаходити в скільки разів один інтервал більший чи менший за інший, але додавати, наприклад, дати якихось подій не має сенсу.

Шкали відношень призначені для властивостей, до множини кількісних проявів яких можна застосувати логічні відношення еквівалентності, порядку і пропорційності, а для деяких шкал відношень ще й відношення адитивності. В шкалах відношень є також однозначний природний критерій нульового кількісного прояву властивості і одиниці вимірювання, встановлені за згодою. Прикладом такої шкали є шкала маси.

Абсолютні шкали мають всі ознаки шкал відношень, але додатково в них присутнє природне однозначне визначення одиниці вимірювання. Такі шкали відповідають відносним величинам: підсиленню, ослабленню, добротності тощо. Серед абсолютних шкал виділені обмежені за діапазоном абсолютні шкали, значення яких знаходяться від 0 до 1. Відповідними величинами є фактори (наприклад, корисної дії) і відношення (наприклад, відношення відбиття).

Можливі різні відношення між шкалами, одиницями та еталонами [13]. Шкали вимірювання можуть бути встановлені і використані без одиниць вимірювання. Так в шкалах порядку, найменувань та класифікації принципово неможливо ввести одиниці вимірювання в звичайному (метричному) розумінні. Тому в шкалах порядку, найменувань та класифікації можуть відтворюватись і передаватись тільки шкали, а в шкалах відношень, інтервалів і абсолютних шкалах еталони можуть відтворювати і передавати шкалу і (чи) розмір одиниці вимірювання. Крім того, при відтворенні шкал порядку, найменувань і класифікації є необхідність у відтворенні всієї шкали, а в решті шкал може відтворюватись частина шкали (від усього діапазону до однієї точки шкали, що відповідає відтворенню одиниці вимірювання).

Шкали відношень і інтервалів можуть бути реалізовані тільки через еталони, а шкали порядку, найменувань, класифікації і абсолютні шкали - без еталонів. Таким чином, шкала може бути без еталона, а еталон не може бути без шкали. Можуть бути шкали без одиниць вимірювання, але одиниць без шкал вимірювання немає. Все це є підтвердженням факту, що поняття «шкала вимірювання» є більш загальним і фундаментальним в метрології у порівнянні з поняттям «одиниця вимірювання». Такий висновок (про вторинність поняття «одиниця вимірювання») був зроблений в [13].

Слід зауважити, що в межах одного типу шкали можуть мати різні властивості. Як приклад розглянемо шкали порядку (рис. 1.13).

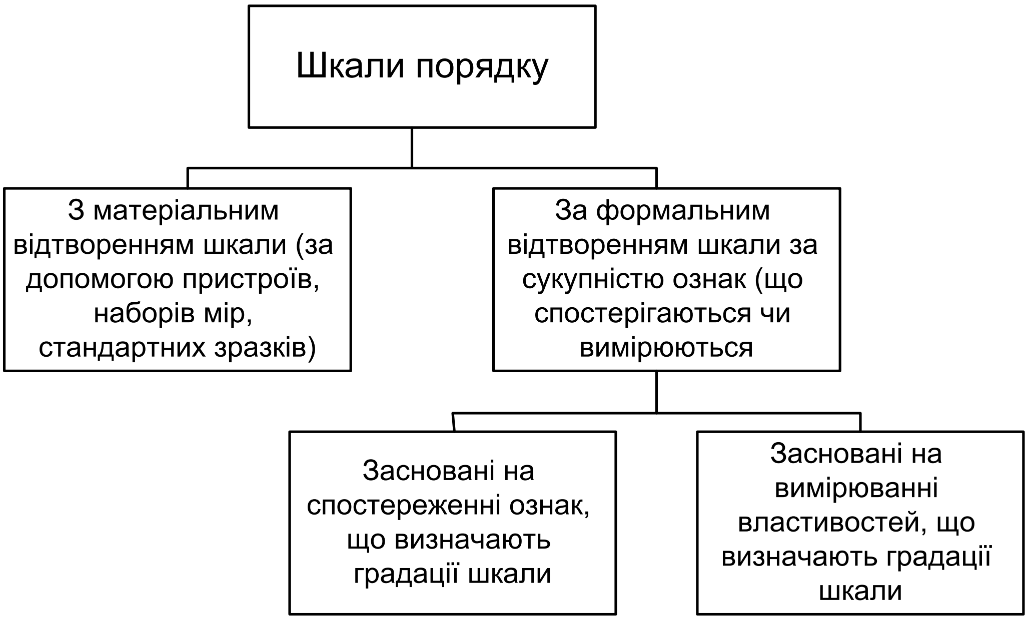


Рис. 1.13. Систематизація шкал порядку.

Шкали порядку можуть бути розподілені на шкали з фізичним відтворенням шкали за допомогою пристроїв, наборів мір і шкали з формальним відтворенням шкали за сукупністю ознак, що спостерігаються чи вимірюються [14]. Прикладом шкали з фізичним відтворенням є ситова шкала розміру матеріалу (розміру часток зернин матеріалу). Розмір матеріалу виражають в міліметрах чи мікрометрах. Визначається розмір за допомогою сит. Матеріал, що пройшов через отвори сита, позначають знаком «-», що не пройшов - знаком «+». Часто знак «+» відсутній і це означає, що частки за своїми розмірами менше вказаного. Наприклад, крупність матеріалу 0,175 мм означає, що розмір часток менший за 0,175 мм.

Прикладами шкал з формальним відтворенням шкали за сукупністю ознак є шкала твердості, сейсмічна шкала землетрусу. Треба відзначити, що шкали порядку розвиваються у напрямку здобуття ознак, що вимірюються. Прикладом можуть служити сейсмічна шкала землетрусу Меркаллі-Канканьї (з вимірюванням прискорення коливань ґрунту), удосконалена шкала Бофорта (з вимірюванням швидкості вітру), шкала твердості за Бринелем. Такі шкали порядку наближаються до метричних шкал. В літературі вони дістали назву асоціативних шкал.

Таким чином шкали розвиваються з розвитком «вимірюваності» величин чи властивостей. Так шкали найменувань наближаються до шкал порядку, а шкали порядку - до метричних шкал.

Зі шкалою найменувань і класифікації пов'язана така процедура експериментальної інформатики як розпізнавання об'єктів (рис. 1.14). В залежності від шкали зміст цієї процедури відрізняється. Якщо використовується шкала найменувань - це розпізнання довільних об'єктів і виявлення заданого об'єкта. За шкалою класифікації - це групування подібних об'єктів, їх класифікація (чи категоризація) за навчальними зразками чи заданими правилами. Особливе місце займає процедура групування подібних об'єктів - кластеризація, за якою шкала класифікації будується не заздалегідь, а в процесі виконання всієї процедури.

Подібні проблеми виникають і при технічному діагностуванні. Його основною задачею є визначення технічного стану об'єкта, що досліджується з точки зору його справності, дієздатності і правильності функціонування.

В найпростішому випадку для вирішення цієї задачі множина технічних станів об'єкта поділяється на два класи, один з яких включає справний стан, а інший - всі несправні. В більш загальному випадку число класів відповідає заданому списку дефектів. Для визначення класу поточного стану об'єкта вимірюють ряд його параметрів, чи характеристик (діагностичних ознак). Таким чином, якщо процедура діагностування включає в себе процедуру вимірювання при виконанні процедури діагностування використовується декілька шкал.

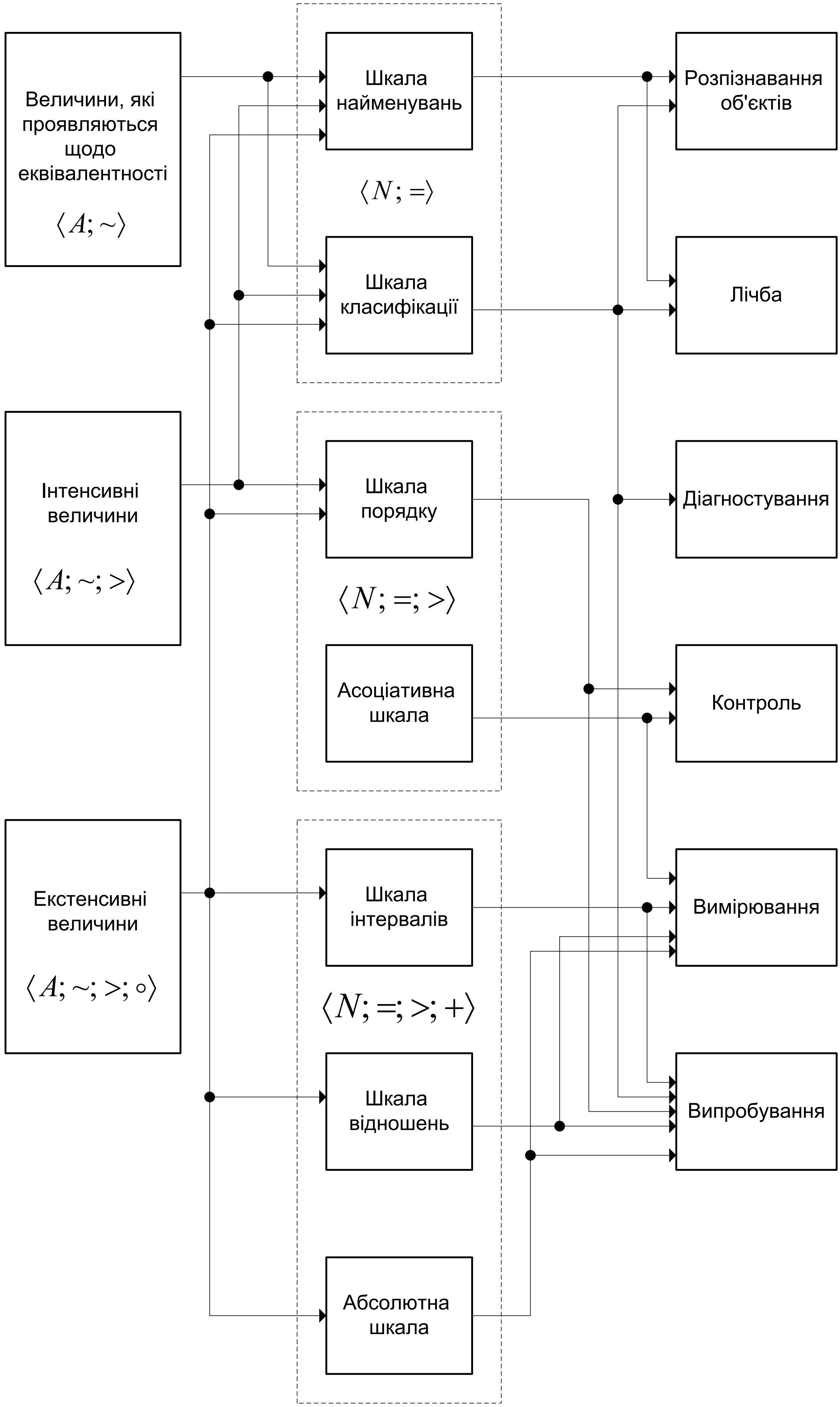


Рис. 1.14. Зв'язок між проявами властивостей, шкалами і ПЕІ.

Основним інформативним параметром сукупності об'єктів, що мають відношення еквівалентності є їхня кількість або чисельність, яка визначається шляхом лічби. Якщо маємо сукупність об'єктів з відомим загальним числом об'єктів n_0:

$$n(x_i) = \sum_{i=1}^{n_0} a_i \ ,$$

де $a_i = \begin{cases} 1, & \textit{ÿêùî âëàñòèâ³ñòü îá'ºêòà åêâ³âàëåíòíà } x_i \\ 0, & \textit{ÿêùî âëàñòèâ³ñòü îá'ºêòà íåêâ³âàëåíòíà } x_i \end{cases}.$

Інтенсивні величини відображаються числом. Ці числа не використовуються для додавання, множення та інших математичних операцій в рівняннях фізики, але вони можуть бути використані при визначенні таких статистичних характеристик як ймовірність, мода, медіана, квантіль, коефіцієнт рангової кореляції. Інтенсивні величини відображаються формальними об'єктами за шкалою порядку. Зі шкалою порядку пов'язані такі процедури експериментальної інформатики, як ранжування об'єктів, контроль. Процедура технічного контролю також пов'язана зі шкалою порядку, процедура контролю якості - з багатовимірною шкалою порядку.

Якщо величина A проявляється щодо еквівалентності, порядку та адитивності, то її можна не тільки порівняти щодо еквівалентності та розміру, класифікувати та проконтролювати, але й виміряти. Екстенсивні величини можуть бути відтворені за заданим розміром. Процедура вимірювання пов'язана зі шкалами інтервалів, пропорційності і абсолютними шкалами.

РОЗДІЛ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК

2.1. Основні визначення і формули

Різницю Δ між результатом вимірювання x та істинним значенням вимірюваної величини $x_{\text{зñò}}$ називають абсолютною похибкою результату вимірювання:

$$\Delta = x - x_{\text{зñò}} .$$

Похибка Δ є випадковою величиною. Її можна подати як суму двох складових:

$$\Delta = \Delta_S + \overset{\circ}{\Delta},$$

де Δ_S - невипадкова складова, що відповідає математичному сподіванню похибки Δ; $\overset{\circ}{\Delta}$ - випадкова складова с нульовим математичним сподіванням.

Невипадкову складову Δ_S називають систематичною похибкою, а $\overset{\circ}{\Delta}$ - випадковою похибкою.

Якщо значення Δ_S відоме, то систематичну похибку можна вилучити, прийнявши за кінцевий результат вимірювання $x_{\text{âèïð}}$ - виправлений результат вимірювання:

$$x_{\text{âèïð}} = \tilde{o} - \Delta_{\text{S}}.$$

Випадкову похибку вилучити неможливо, тому що невідомо, яке конкретне значення прийняла випадкова величина $\overset{\circ}{\Delta}$ при даному вимірюванні. Для оцінки впливу випадкової похибки на результат вимірювання задають додатну Δ_1 і від'ємну Δ_2 границі похибки Δ і знаходять ймовірність того що істинне значення вимірюваної величини знаходиться між $x-\Delta_2$ і $x+\Delta_1$. Інтервал $\left[x-\Delta_2 \ ; \ x+\Delta_1\right]$ називають довірчим інтервалом, а ймовірність того, що $x_{зст}$ знаходиться в цьому інтервалі називають довірчою ймовірність $P_Д$. Тобто $P_Д$ дорівнює :

$$Р_Д = Р\left[-\Delta_1 \le \overset{\circ}{\Delta} \ge \Delta_2\right].$$

Якщо $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_В$, тоді

$$Р_Д = Р\left[\left|\overset{\circ}{\Delta}\right| \le \Delta_Г\right].$$

2.2. Розподіл випадкових похибок

Найбільш повною характеристикою випадкової похибки, як випадкової величини, є функція розподілу ймовірності

$$F(\Delta) = P(x < \Delta),$$

де Δ - поточне значення похибки.

Функцію розподілу $F(\Delta)$ іноді називають інтегральною функцією розподілу. Якщо функція розподілу неперервна і її можна диференціювати, то можна знайти диференційний розподіл або функцію розподілу щільності ймовірності, що подають як похідну від $F(\Delta)$:

$$P(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta}.$$

Щільність ймовірності є розмірнісною величиною:

$$\dim P(\Delta) = \dim \frac{1}{\Delta}.$$

2.3. Точкові характеристики випадкових похибок

Для отримання точкових характеристик похибки використовують моменти випадкової величини. Якщо позначити через $m_k[\Delta]$ і $\mu_k[\Delta]$ відповідно k-й перший момент і k-й центральний момент похибки, тоді

$$m_k[\Delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^k \cdot P(\Delta) d\Delta ;$$

$$\mu_k[\Delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - M[\Delta])^k \cdot P(\Delta) d\Delta .$$

Як точкові характеристики похибки використовуються:

- перший начальний момент – математичне сподівання:

$$m_1[\Delta] = M[\Delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \cdot P(\Delta) d\Delta$$

- другий центральний момент – дисперсія:

$$\mu_2[\Delta] = D[\Delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - M[\Delta])^2 \cdot P(\Delta) d\Delta .$$

Фізичний смисл математичного сподівання - центр групування значень випадкових похибок. Фізичний смисл дисперсії - це потужності розсіювання відносно математичного сподівання. Еквівалентом діючого значення є середнє квадратичне відхилення (СКВ):

$$\sigma[\Delta] = \sqrt{D[\Delta]} .$$

Для характеристики форми розподілу використовують третій і четвертий центральні моменти. Відхилення симетрії розподілу характеризує коефіцієнт асиметрії розподілу $\gamma_a[\Delta]$:

$$\gamma_a[\Delta] = \frac{\mu_3[\Delta]}{\sigma^3[\Delta]} .$$

Коефіцієнт асиметрії $\gamma_a[\Delta]$ дорівнює нулю у похибок з симетричним розподілом.

Для характеристики крутості розподілу використовуються:

- ексцес ε:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4[\Delta]}{\sigma^4[\Delta]};$$

- коефіцієнт ексцесу γ_ε:

$$\gamma_\varepsilon = \varepsilon - 3$$

- контрексцес χ

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

При використанні другого і четвертого центральних моментів, форма розподілу характеризується значенням ексцесу Э. Але ексцес різних розподілів може приймати значення від 1 до ∞. Тому цей параметр не завжди зручно використовувати. Його нелінійне перетворення називають контрексцесом [15]. Значення контрексцеса знаходяться в межах від 0 (при $\varepsilon = \infty$) до 1 (при $\varepsilon = 1$). Коефіцієнт ексцесу характеризує відхилення форми розподілу від нормального (для нормального розподілу $\varepsilon = 3$). Якщо $\gamma_\varepsilon > 0$, то графік щільності ймовірності сильніше загострюється, якщо $\gamma_\varepsilon < 0$, то загостреність графіка щільності ймовірності менше ніж у нормального розподілу.

Як точкову характеристику похибки використовують координату центра розподілу. Якщо координату центра розподілу $\Delta_ö$ знаходять за умов симетрії, тобто при $F[\Delta_ö] = 0{,}5$, то отримане значення $\Delta_ö$ називають медіаною. Таку характеристику використовують для класу симетричних експоненційних розподілів. Якщо координату центра розподілу знаходять як центр ваги, тоді $\Delta_ö$ дорівнює математичному сподіванню:

$$\Delta_{\ddot{o}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta \cdot P(\Delta) d\Delta = M[\Delta].$$

Як центр розподілу може бути використана мода – значення абсциси розподілу похибки, за яким щільність ймовірності $P(\Delta)$ досягає максимуму. Розподіл з одним максимальним значенням називають одномодальним, з двома – двомодальним і т.д. Розподіли, в середній частині яких знаходиться не максимум, а мінімум, називають антимодальними.

Характеристичну функцію $f(t)$ похибки з щільністю ймовірності $P(\Delta)$ отримують з співвідношення:

$$f(t) = M\left[e^{jt\Delta}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\Delta) \cdot e^{jt\Delta} d \, .$$

В свою чергу, функція розподілу щільності ймовірності пов'язана з характеристичною функцією наступним співвідношенням:

$$P(\Delta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{jt\Delta} dt \, .$$

2.4. Інтервальні характеристики випадкових похибок

В теорії ймовірностей, математичній статистиці і відповідно в теорії похибок, використовують поняття «квантиль», «інтерквантильний проміжок», «довірча ймовірність», «рівень значущості», «довірчий інтервал», тощо.

Квантилі відсікають в межах ряду певну частину його членів. Тобто, квантиль розподілення значень – це таке значення x_P, що

значення p-і частини сукупності менше або рівне x_P.

$a\%$ - ною квантиллю, називають абсцису розподілу щільності ймовірності, зліва від якої знаходиться $a\%$ площі під кривою розподілу. Отже ймовірність P

того, що випадкова похибка Δ знаходиться в діапазоні від $-\infty$ до $\Delta_{a\%}$ дорівнює $a\%$ або $\frac{a}{100}$, тобто

$$P(-\infty < \Delta < \Delta_{a\%}) = \frac{a}{100}.$$

Іншими словами, квантиль визначається як

$$F(\Delta_{a\%}) = \frac{a}{100}. \tag{2.1}$$

Абсциса медіани – вертикалі, яка розділяє площу під кривою розподілу навпіл, є 50% - ною квантиллю $\Delta_{50\%}$.

Інтерквантильним проміжком називають відстань між $(100-a)\%$ -ною і $a\%$ -ною квантилями. Між вертикалями симетричного центрованого розподілу, що обмежують інтерквантильний проміжок, знаходиться $(100-2a)\%$ площини під кривою розподілу щільності ймовірності.

Довірчою ймовірністю $P_{äîâ}$ називають ймовірність знаходження випадкової похибки Δ між довірчих границь $\Delta_{Ã1}$ і $\Delta_{Ã2}$: $P(\Delta_{Ã1} < \Delta < \Delta_{Ã2}) = P_{äîâ}$

Наприклад, для симетричного центрованого розподілу при $-\Delta_{Ã} = \Delta_{à\%}$ і $\Delta_{Ã} = \Delta_{(100-à)\%}$ отримують

$$P\left(\Delta_{a\%} < \Delta < \Delta_{(100-a)\%}\right) = \frac{100-2a}{100} = 1 - \frac{2a}{100}.$$

Квантилі багатьох розподілів табульовані (табл.1). Наприклад. Довірчу ймовірність $P_{äîâ}$, при заданих граничних значеннях похибки $\pm\Delta_{Ã}$. Можна визначити за відомими значеннями СКВ для
нормального розподілу за відповідними таблицями.

$$P_{äîâ} = P(-\Delta_{Ã} < \Delta < \Delta_{Ã}) = P(-z_{Ã} < \mathrm{z} < z_{Ã}) = 2\hat{O}(z_{Ã}),$$

де $z_{\tilde{A}} = \dfrac{\Delta_{\tilde{A}}}{\sigma}$; $\hat{O}(\mathrm{z})$ - функція Лапласа.

Рівнем значущості $\alpha = 1 - \dfrac{a}{100}$ називають ймовірність того, що випадкова величина х знаходиться в інтервалі між $a\%$ і ∞. Рівнем значущості характеризують критичну область. Якщо знайдена оцінка попадає в критичну область, гіпотезу не приймають. При збільшенні рівня значущості може бути відкинута правильна гіпотеза, а при зменшенні прийнята невірна гіпотеза. Тому рівень значущості приймають виходячи з діапазону 2.5 % ÷ 10 %.

2.5. Характеристики випадкових похибок з різними розподілами

2.5.1. Рівномірний центровий розподіл

При рівномірному центрованому розподілі, всі значення випадкових похибок розподілені в середині інтервалу з однаковою щільністю ймовірності (рис.2.1):

$$P(\Delta) = \begin{cases} 0 & \textit{ïðè} \quad |\Delta| > \Delta_{\tilde{A}}; \\ \dfrac{1}{2\Delta_{\tilde{A}}} & \textit{ïðè} \quad -\Delta_{\tilde{A}} \leq \Delta \leq \Delta_{\tilde{A}} \end{cases}.$$

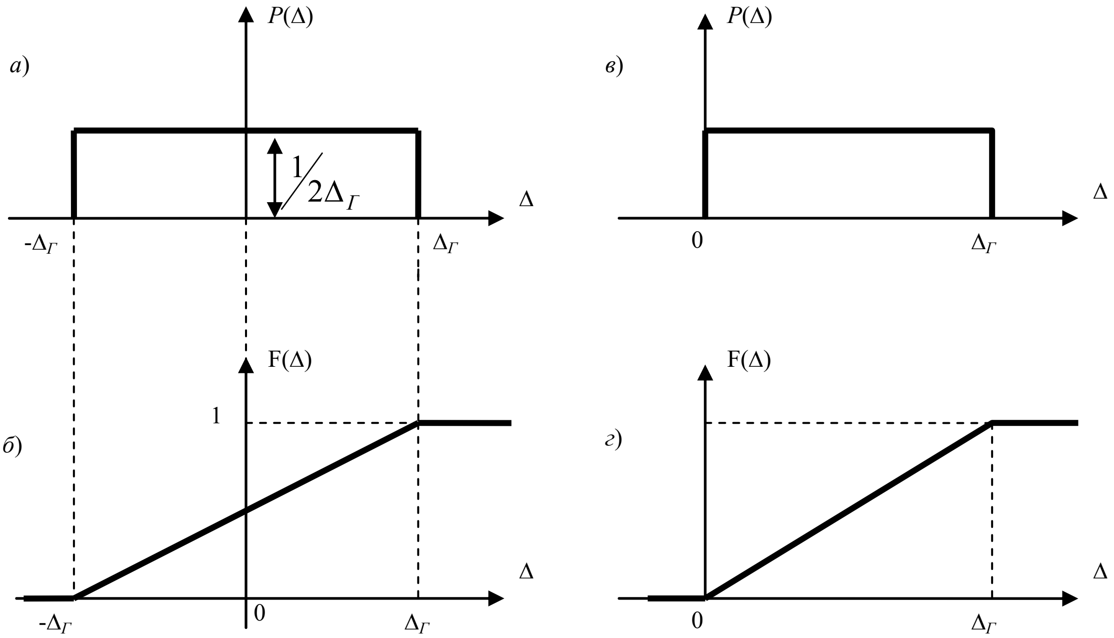


Рис.2.1. Рівномірний розподіл щільності ймовірності (а, в)
і функції розподілу ймовірності (б, г).

Так розподілені похибки: від тертя в опорах стрілочних приладів; похибки заокруглення при обчисленнях; від впливу порогу чутливості; похибки квантування при введенні поправки; не вилучені залишки систематичних похибок; від дії впливових величин при їх симетричних змінах з однаковою ймовірністю, тощо.

Функція розподілу випадкової похибки

$$F(\Delta)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad \Delta<-\Delta_{\tilde{A}}; \\ \dfrac{\Delta+\Delta_{\tilde{A}}}{2\Delta_{\tilde{A}}} & \text{ïðè} \quad -\Delta_{\tilde{A}}\le\Delta\le\Delta_{\tilde{A}}; \\ 1 & \text{ïðè} \quad \Delta>\Delta_{\tilde{A}}; \end{cases} \tag{2.2}$$

- математичне сподівання: $M[\Delta]=0.$

- середнє квадратичне відхилення: $\sigma[\Delta]=\Delta_{\tilde{A}}/\sqrt{3}.$

- коефіцієнт асиметрії: $\gamma_a=0$.

- ексцес: $\varepsilon=1{,}8$.

- коефіцієнт ексцесу: $\gamma_\varepsilon=-1{,}2$.

Квантилі для рівномірного розподілу можуть бути знайдені з використанням співвідношень (2.1) і (2.2)

$$\frac{\Delta_{a\%} + \Delta_{\tilde{A}}}{2\Delta_{\tilde{A}}} = \frac{\grave{a}}{100} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\grave{a}\%} = \frac{\grave{a}}{100} \cdot 2\Delta_{\tilde{A}} - \Delta_{\hat{A}}$$

Якщо, наприклад, прийняти $\ETH_{\ddot{a}\hat{\imath}\hat{a}} = 0{,}95$, то границі довірчого інтервалу будуть визначені як нижня і верхня границі інтерквантильного проміжку:

$$\Delta_{\tilde{A}1} = \Delta_{2,5\%} = 0{,}025 \cdot 2\Delta_{\tilde{A}} - \Delta_{\tilde{A}} = -0{,}95\Delta_{\tilde{A}};$$

$$\Delta_{\tilde{A}2} = \Delta_{97,5\%} = 0{,}975 \cdot 2\Delta_{\tilde{A}} - \Delta_{\tilde{A}} = 0{,}95\Delta_{\tilde{A}}.$$

2.5.2. Рівномірний розподіл зі зміщенням

Рівномірний розподіл зі зміщенням $0{,}5\Delta_{\hat{A}}$ (рис. 2.1 (в)) може бути поданий наступною формулою для функції розподілу щільності ймовірності:

$$P(\Delta) = \begin{cases} 0 & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad \Delta < 0 \quad i \quad \Delta > \Delta_{\hat{A}} \\ \dfrac{1}{2\Delta_{\tilde{A}}} & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad 0 \le \Delta \le \Delta_{\tilde{A}} \end{cases}.$$

Так розподілені похибки: від рівномірної зміни напруги джерел живлення (наприклад, зміни робочого струму потенціометра при розряді батареї); від розігріву апаратури за короткий час; від недосконалості ізоляції; від квантування.

Функція розподілу ймовірності:

$$F(\Delta) = \begin{cases} 0 & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad \Delta \le 0; \\ \dfrac{\Delta}{\Delta_{\tilde{A}}} & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad 0 \le \Delta \le \Delta_{\tilde{A}}; \\ 1 & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad \Delta > \Delta._{\tilde{A}} \end{cases} \tag{2.3}$$

- математичне сподівання: $M[\Delta] = \dfrac{\Delta_{\tilde{A}}}{2}$.

- середнє квадратичне відхилення: $\sigma[\Delta] = \Delta_{\tilde{A}} \big/ 2\sqrt{3}$.

Коефіцієнти асиметрії і ексцесу такі, як і при центрованому розподілі.

Квантилі для рівномірного розподілу зі зміщенням можуть бути знайдені з використанням співвідношень (2.1) і (2.3):

$$\Delta_{a\%} = \frac{a}{100} \cdot \Delta_{\tilde{A}}; \qquad \Delta_{(100-a)\%} = \left(1 - \frac{\grave{a}}{100}\right)\Delta_{\tilde{A}}.$$

Якщо, наприклад, прийняти $\text{Đ}_{\ddot{a}\hat{i}\hat{a}} = 0{,}95$, то границі довірчого інтервалу дорівнюють:

$$\Delta_{\tilde{A}1} = \Delta_{2,5\%} = 0{,}025\Delta_{\tilde{A}};$$

$$\Delta_{\tilde{A}2} = \Delta_{97,5\%} = 0{,}975\Delta_{\hat{A}}.$$

У загальному випадку, при рівномірному розподілі випадкова похибка Δ може приймати з однаковою ймовірністю значення в інтервалі $\Delta_{\tilde{A}1} < \Delta < \Delta_{\tilde{A}2}$, де $\Delta_{\tilde{A}1}$, $\Delta_{\tilde{A}2}$ - нижня і верхня границі похибки відповідно. Функція $F(\Delta)$ і щільність ймовірності $P(\Delta)$ такого розподілу визначаються за співвідношеннями:

$$F(\Delta) = \begin{cases} 0 & \ddot{i}\eth\grave{e} \quad \Delta \le \Delta_{\tilde{A}1}; \\ \dfrac{\Delta - \Delta_{\tilde{A}1}}{\Delta_{\tilde{A}2} - \Delta_{\tilde{A}1}} & \ddot{i}\eth\grave{e} \quad \Delta_{\tilde{A}1} \le \Delta \le \Delta_{\tilde{A}2}; \\ 1 & \ddot{i}\eth\grave{e} \quad \Delta > \Delta_{\tilde{A}2}. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\text{Đ}(\Delta) = \begin{cases} 0 & \ddot{i}\eth\grave{e} \quad \Delta \le \Delta_{\tilde{A}1}; \\ \dfrac{1}{\Delta_{\tilde{A}2} - \Delta_{\tilde{A}1}} & \ddot{i}\eth\grave{e} \quad \Delta_{\tilde{A}1} \le \Delta \le \Delta_{\tilde{A}2}; \\ 0 & \ddot{i}\eth\grave{e} \quad \Delta > \Delta_{\tilde{A}2}. \end{cases}$$

Якщо $\Delta_{\tilde{A}1} = -\Delta_{\hat{A}}$, $\Delta_{\tilde{A}2} = \Delta_{\hat{A}}$ (рівномірний центрований розподіл), то з співвідношення (2.4) отримуємо (2.2). Якщо $\Delta_{\tilde{A}1} = 0$, $\Delta_{\tilde{A}2} = \Delta_{\hat{A}}$

(рівномірний розподіл зі зміщенням), то з співвідношення (2.4) отримуємо (2.3).

Для рівномірного розподілу (2.4) такі характеристики відповідно дорівнюють:

- математичне сподівання: $M[\Delta]=\frac{1}{2}\left(\Delta_{\tilde{A}1}+\Delta_{\tilde{A}2}\right).;$

- дисперсія: $D[\Delta]=\frac{1}{12}\left(\Delta_{\tilde{A}2}-\Delta_{\tilde{A}1}\right)^{2}.;$

- середнє квадратичне відхилення: $\sigma[\Delta]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\Delta_{\tilde{A}2}-\Delta_{\tilde{A}1}\right).$

2.5.3. Нормальний розподіл

Нормальний розподіл (розподіл Гауса) характеризується двома властивостями:

- симетрії,
- монотонного зменшення щільності ймовірності.

Якщо випадкова похибка є композицією більше чотирьох випадкових, незалежних і сумарних похибок, то вона приблизно може бути описана нормальним розподілом. Похибки вимірювань в більшості мають декілька складових і розподілені нормально.

Функції розподілу ймовірності і щільності ймовірності наведені нижче:

$$F(\Delta)=\frac{1}{2}+\hat{O}\left(\frac{\Delta-\Delta_{S}}{\sigma[\Delta]}\right); \tag{2.5}$$

$$P(\Delta)=\frac{1}{\sigma[\Delta]\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\Delta-\Delta_{S}\right)^{2}}{2\sigma^{2}[\Delta]}\right); \tag{2.6}$$

де $\Delta_S = M[\Delta]$ - систематична складова, математичне сподівання; $\hat{O}\left(\frac{\Delta - \Delta_S}{\sigma[\Delta]}\right) = \hat{O}(z)$ - функція Лапласа, яка табульована [табл.1]; $\sigma[\Delta]$ - середнє квадратичне відхилення.

Якщо $\Delta_S = 0$, то співвідношення (2.5) і (2.6) приймають вигляд:

$$F\left(\overset{\circ}{\Delta}\right) = \frac{1}{2} + \hat{O}\left(\frac{\overset{\circ}{\Delta}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right); \tag{2.7}$$

$$P\left(\overset{\circ}{\Delta}\right) = \frac{1}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\overset{\circ}{\Delta}\right)^2}{2\sigma^2\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right); \tag{2.8}$$

Графіки функцій центрованого нормального розподілу (2.7) і (2.8) наведено на рис. 2.2.

Точкова характеристика – середнє квадратичне відхилення $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ визначає форму розподілу. На рис.2.3 наведено графіки функції щільності ймовірності при різних значеннях СКВ.

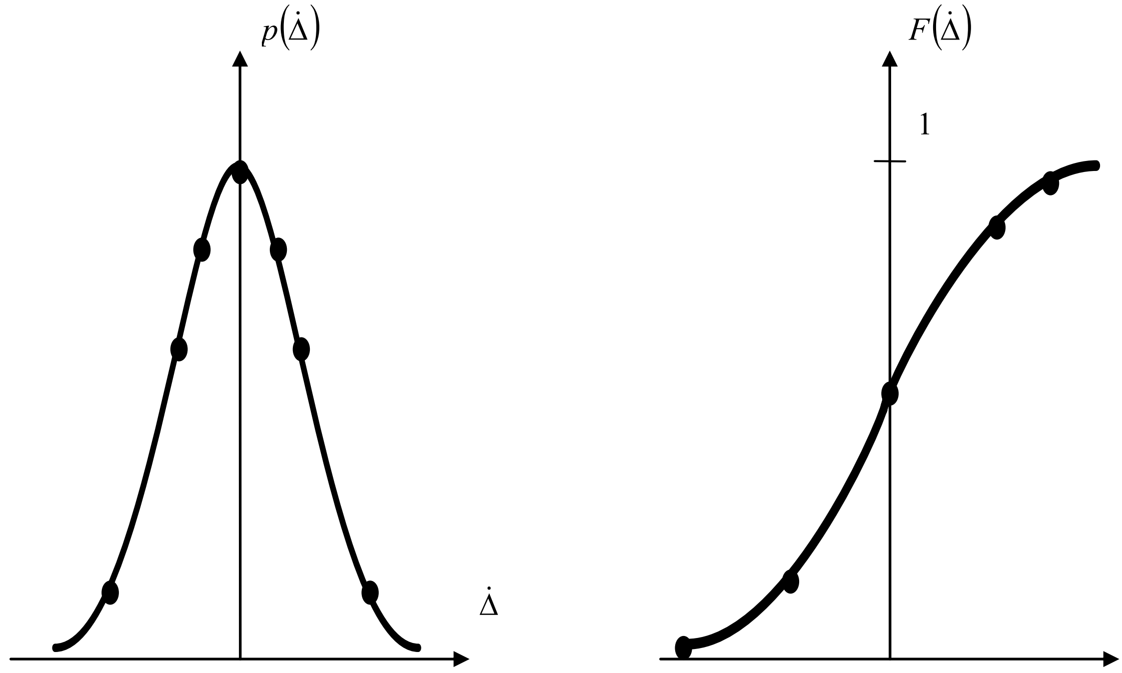


Рис. 2.2. Функції розподілу ймовірності і щільності ймовірності, що відповідають нормальному розподілу.

Якщо $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ зменшується, ордината при нулю зростає. Підйом кривої в центральній частині компенсується більш різким її спадом до вісі абсцис, тому що площа під кривою щільності ймовірності залишається сталою і дорівнює одиниці.

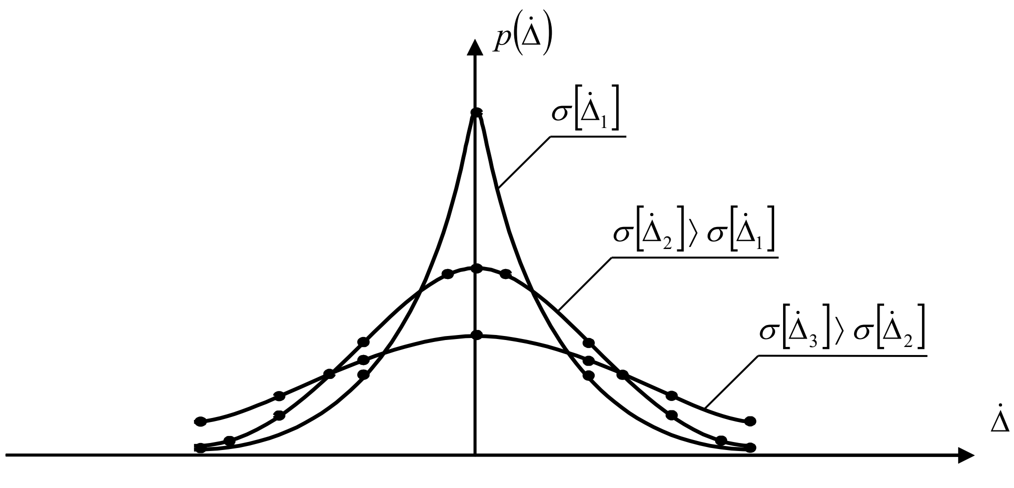


Рис.2.3. Нормальний розподіл при різних значеннях СКВ.

При дуже малих значеннях СКВ практично вся площа під кривою $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ сконцентрована на невеликому інтервалі з центром в нулі. При збільшені СКВ крива сплющується, приймаючи все більше плоско вершинну форму.

Нормовану форму функції розподілу щільності ймовірності (2.8) отримують при $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]=1$ після підстановки $\overset{\circ}{\Delta}=\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]\cdot z$:

$$P(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

Нормовану функцію розподілу ймовірності отримують з (2.7) за умов

$$\overset{\circ}{\Delta}=\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]\cdot z: \qquad F(z)=\frac{1}{2}+\hat{O}(\mathrm{z}). \tag{2.9}$$

Якщо границі довірчого інтервалу позначити як $\Delta_{\tilde{A}1}$ і $\Delta_{\tilde{A}2}$, то ймовірність попадання в довірчий інтервал при $\Delta_S \neq 0$ знаходять за формулою:

$$P_{\text{äîâ}}=P\left(\Delta_{\tilde{A}1}\le\Delta\le\Delta_{\tilde{A}2}\right)=\hat{O}\left(\frac{\Delta_{\tilde{A}2}-\Delta_{\mathrm{S}}}{\sigma[\Delta]}\right)-\hat{O}\left(\frac{\Delta_{\tilde{A}1}-\Delta_{\mathrm{S}}}{\sigma[\Delta]}\right). \tag{2.10}$$

Якщо $\Delta_S=0$, то з (2.10) отримуємо:

$$P_{\text{äîâ}}=\hat{O}\left(\frac{\Delta_{\tilde{A}2}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right)-\hat{O}\left(\frac{\Delta_{\tilde{A}1}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right)=\hat{O}(z_2)-\hat{O}(z_1).$$

Теж саме можна отримати з використанням (2.9):

$$P_{\text{äîâ}}=F\left(\frac{\Delta_{\tilde{A}2}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right)-F\left(\frac{\Delta_{\tilde{A}1}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right)=F(z_2)-F(z_1)=\hat{O}(z_2)-\hat{O}(z_1) \tag{2.11}$$

При симетрії границь довірчого інтервалу, тобто при $\Delta_{\tilde{A}1} = -\Delta_{\hat{A}}$ і $\Delta_{\tilde{A}2} = \Delta_{\hat{A}}$, з урахуванням парності функції Лапласа $\hat{O}(\mathrm{z})$ отримуємо з (2.11):

$$P_{\ddot{a}\hat{\imath}\hat{a}} = 2\hat{O}(\mathrm{z}).$$

Точкові параметри розподілу, що характеризують форму кривої розподілу, наведені далі:

- коефіцієнт асиметрії нормального розподілу $\gamma_a = 0$;
- ексцес $\varepsilon = 3$;
- коефіцієнт ексцесу $\gamma_\varepsilon = 0$.

Квантилі нормального розподілу можуть бути знайдені з використанням (2.7) і таблиць функції Лапласа [табл.2]:

$$F\left(\Delta_{a\,\%}\right) = \frac{1}{2} + \hat{O}\left(\frac{\Delta_{\mathrm{a}\,\%}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}\right) = \frac{a}{100}.$$

При розрахунках похибок часто використовують наступні квантилі:

1. Між вертикалями, $\Delta_{25\,\%} = -\frac{2}{3}\cdot\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ і $\Delta_{75\,\%} = -\frac{2}{3}\cdot\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ знаходиться половина площі розподілу, тобто $P_{\ddot{a}\hat{\imath}\hat{a}} = 50\,\%$. Значення $-\Delta_{25\,\%} = \Delta_{75\,\%} = \Delta^i$ для нормального розподілу називають ймовірною похибкою: $\Delta^i = \frac{2}{3}\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$.

2. Між вертикалями, що проведені через квантилі $\Delta_{2,5\%} = -2\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ і $\Delta_{97,5\%} = 2\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ знаходиться 95 % площі розподілу, тобто $P_{\ddot{a}\hat{\imath}\hat{a}} = 95\,\%$.

3. Між вертикалями, що проведені через квантилі $\Delta_{0.15\,\%} = -3\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ і $\Delta_{99,85\,\%} = 3\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$ знаходиться 99,7 % площі під кривою розподілу, тобто

$P_{\ddot{a}\hat{i}\hat{a}} = 99{,}7\,\%$. При нормальному зрізаному розподілі цю квантиль приймають як границю похибки.

Треба відмітити, що нормально розподілено багато похибок, а саме, від теплових шумів, від короткочасної нестабільності параметрів елементів, сумарна похибка при великій кількості незалежних і сумарних складових, похибки підгонки резисторів і конденсаторів (за зрізаним нормальним), тощо.

2.5.4. Нормальний зрізаний розподіл

Часто на практиці використовується нормальний зрізаний розподіл, за яким $\left|\Delta_{\max}\right| = 3\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$. Функція розподілу ймовірності для нормального зрізаного розподілу має вигляд:

$$F_{\c{c}}(z) = t^{-1}\left[F\left(\frac{z}{k}\right) - F\left(-\frac{\c{c}}{k}\right)\right],$$

де $z = \dfrac{\overset{\circ}{\Delta}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]} \le 3; \quad t = 0{,}9969; \quad k = 1{,}0148.$

Ймовірність попадання в довірчий інтервал $\left[\Delta_{\tilde{A}1};\Delta_{\tilde{A}2}\right]$ визначається за співвідношенням:

$$P_{\ddot{a}\hat{i}\hat{a}} = F_{\c{c}}(z_2) - F_{\c{c}}(z_1) = t^{-1}\left[F\left(\frac{z_2}{k}\right) - F\left(-\frac{z_1}{k}\right)\right] = t^{-1}\left[\hat{O}\left(\frac{z_2}{k}\right) - \hat{O}\left(-\frac{z_1}{k}\right)\right].$$

При симетричних границях $\Delta_{\tilde{A}2} = -\Delta_{\tilde{A}1} = \Delta_{\tilde{A}}$:

$$P_{\ddot{a}\hat{i}\hat{a}} = 2t^{-1}\hat{O}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{k}}\right),$$

де $z = \dfrac{\Delta_{\tilde{A}}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}$..

Розбіжність між зрізаним і не зрізаним нормальними розподілами незначна:

- при $\left|\Delta_{\tilde{A}}\right| = 2\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$: $P_{\text{äîâ}} = 0{,}9544$ (для нормального розподілу) і

$P_{\text{äîâ}} = 0{,}9542$ (для нормального зрізаного розподілу);

- при $\left|\Delta_{\tilde{A}}\right| = 3\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$: $P_{\text{äîâ}} = 0{,}997$ (для нормального розподілу) і $P_{\text{äîâ}} = 1$

(для нормального зрізаного розподілу).

Коефіцієнти форми для нормального зрізаного розподілу

дорівнюють:

- коефіцієнт асиметрії $\gamma_a = 0$;
- ексцес $\varepsilon = 2{,}81$;
- коефіцієнт ексцесу $\gamma_\varepsilon = -0{,}19$.

2.5.5. Трикутний розподіл (розподіл Сімпсона)

Для щільності ймовірності трикутного симетричного розподілу (розподілу Сімпсона) справедливе співвідношення:

$$P(\Delta) = \frac{1}{\Delta_{\tilde{A}}}\left(1 - \frac{|\Delta|}{\Delta_{\tilde{A}}}\right).$$

Розподілом Сімпсона описують такі похибки: сумарну похибку вимірювання довжини, вуглів за двома заокругленими відліками (похибки заокруглення розподілені рівномірно; похибку вимірювання методом заміщення за двома відліками); похибку квантування інтервалів часу, тощо.

Аналітичний вираз для функції розподілу ймовірності:

$$
F(\Delta)=\begin{cases} 0 \quad \text{ïðè} \quad \Delta < -\Delta_{\text{Ã}} \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta}{\Delta_{\text{Ã}}}\right)^2 \quad \text{ïðè} \quad -\Delta_{\text{Ã}} \le \Delta \le 0 \\ 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{\Delta_{\text{Ã}}}\right)^2 \quad \text{ïðè} \quad 0 \le \Delta \le \Delta_{\text{Ã}} \\ 1 \quad \text{ïðè} \quad \Delta > \Delta_{\text{Ã}} \end{cases} \qquad (2.12)
$$

Точкові характеристики розподілу Сімпсона:

- математичне сподівання центрованого розподілу: $M\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]=0.$

- середнє квадратичне відхилення: $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]=\Delta_{\text{Ã}}\big/\sqrt{6}\approx\frac{\Delta_{\text{Ã}}}{2{,}4}$

- коефіцієнт асиметрії: $\gamma_a=0$

- ексцес: $\varepsilon=2{,}4.$

- коефіцієнт ексцесу: $\gamma_\varepsilon=-0{,}6.$

Інтервальні характеристики розподілу Сімпсона можуть бути знайдені з використанням (2.12):

$$
F\left(\Delta_{a\%}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta_{a\%}}{\Delta_{\text{Ã}}}\right)^2; \qquad F\left(\Delta_{(100-a)\%}\right)=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta_{(100-a)\%}}{\Delta_{\text{Ã}}}\right)^2;
$$

Якщо, наприклад, прийняти $\text{Đ}_{\text{äîâ}}=0{,}95$, тоді

$$
F\left(\Delta_{a\%}\right)=F\left(\Delta_{2,5\%}\right)=0{,}925; \qquad F\left(\Delta_{(100-a)\%}\right)=F\left(\Delta_{97,5\%}\right)=0{,}975\,.
$$

Звідки знаходимо квантилі (границі довірчого інтервалу):

$$
1+\frac{\Delta_{2,5\%}}{\Delta_{\text{Ã}}}=\sqrt{0{,}05}=0{,}22; \quad \Delta_{2,5\%}=-0{,}78\Delta_{\text{Ã}};
$$

$$
1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta_{97,5\%}}{\Delta_{\text{Ã}}}\right)=0{,}975; \quad \Delta_{97,5\%}=0{,}78\Delta_{\text{Ã}}
$$

2.5.6. Розподіл Стьюдента

Сім'я розподілів Стьюдента використовується як модель для опису щільності ймовірності похибок багаторазових вимірювань при обмеженій кількості вимірювань n. На границі розподіл Стьюдента застосовують, якщо $n < 20$. При $n > 20$ використовують модель нормального розподілу.

Центровану і нормалізовану сім'ю розподілів Стьюдента описують наступним виразом для щільності ймовірності:

$$P(t,\nu) = \frac{\tilde{A}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\cdot\tilde{A}\left(\frac{\nu}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu}}},$$

де $\tilde{A}(\tilde{o})$ - гамма – функція, а ν - число ступенів свободи, що пов'язана з числом вимірювань n: $\nu = n - 1$; $t = \dfrac{\overset{\circ}{\Delta}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}$.

Для нормалізованих розподілів Стьюдента з числом ступенів свободи $\nu > 4$ справедливі співвідношення:

$$\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right] = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}};$$

$$\varepsilon = 3\cdot\frac{n-3}{n-5} = 3\frac{\nu-3}{\nu-4}.$$

Ймовірність того що випадкова похибка з розподілом Стьюдента прийме певне значення в інтервалі $-\Delta_{\tilde{A}};\Delta_{\hat{A}}$, обчислюється за формулою:

$$P\left(-\Delta_{\Gamma} \le \mathring{\Delta} \le \Delta_{\Gamma}\right) = P\left(-t_P \cdot \sigma\left\lfloor \mathring{\Delta} \right\rfloor \le \mathring{\Delta} \le t_P \cdot \sigma\left\lfloor \mathring{\Delta} \right\rfloor\right) =$$

$$P\left(-t_P \le \mathrm{t} \le t_P\right) = \int_{-t_P}^{t_P} P(t,\nu)\,dt = 2\int_{0}^{t_P} P(t,\nu)\,dt \qquad (2.13)$$

Значення коефіцієнта Стьюдента t_P для різних ймовірностей *P*, обчислених за формулою (2.13) з урахуванням числа ступенів свободи ν, табульовані. В таблиці 2 подані значення коефіцієнта *t* для випадкової величини з розподілом Стьюдента і з $\nu = n - 1$ ступенями свободи для ймовірностей $Đ_{äîâ} = 0{,}95$ і $Đ_{äîâ} = 0{,}99$.

2.5.7. Двох модальні розподіли

Двох модальний розподіл характерний, наприклад, для відхилень від номіналу параметрів масових виробів: конденсаторів, резисторів, що розбраковуються за класами.

Якщо для першого класу відхилення, наприклад, нормовані в діапазоні $\pm\delta_{Ã2} = \pm 1\%$, а для другого $\pm\delta_{Ã1} = \pm 2\%$, то звичайно, що в розподілі відхилень резисторів, що залишились після відбору для першого класу, буде провал (рис.2.4). коли потім відібрати і резистори другого класу з відхиленнями $\pm 2\%$, то розподіл відхилень цих резисторів буде двох модальним. Якщо пристрої для розбраковки мають похибки, розподіл набуває виду (рис.2.4 б).

Такий розподіл можуть мати похибки при наявності гістерезису, тертя в опорах, механічного люфту, тощо.

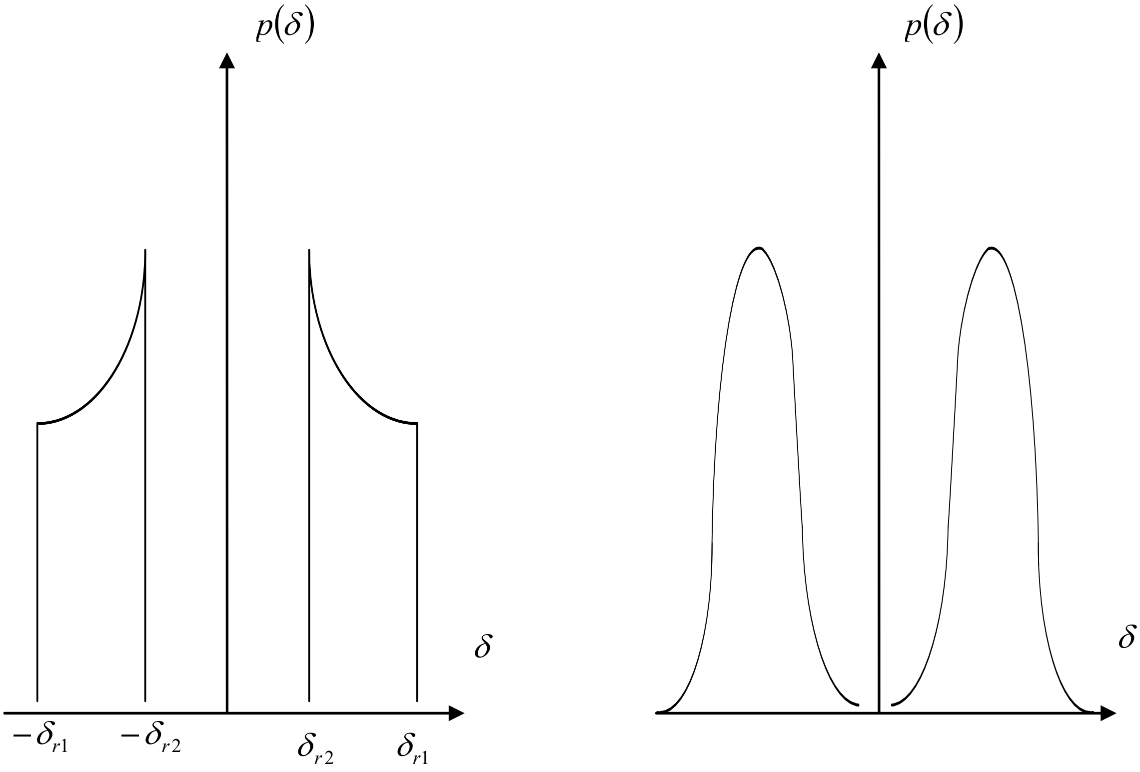


Рис.2.4. Двох модальні розподіли.

До двох модальних розподілів відноситься арксинусний розподіл, щільність ймовірності якого описують співвідношенням:

$$P(\Delta) = \frac{1}{\pi \Delta_{\tilde{A}} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_{\tilde{A}}} \right)^2}} \quad \text{при} \quad -\Delta_{\tilde{A}} < \Delta < \Delta_{\hat{A}} \ .$$

Графіки функцій розподілу щільності ймовірності і ймовірності наведено на рис.2.5.

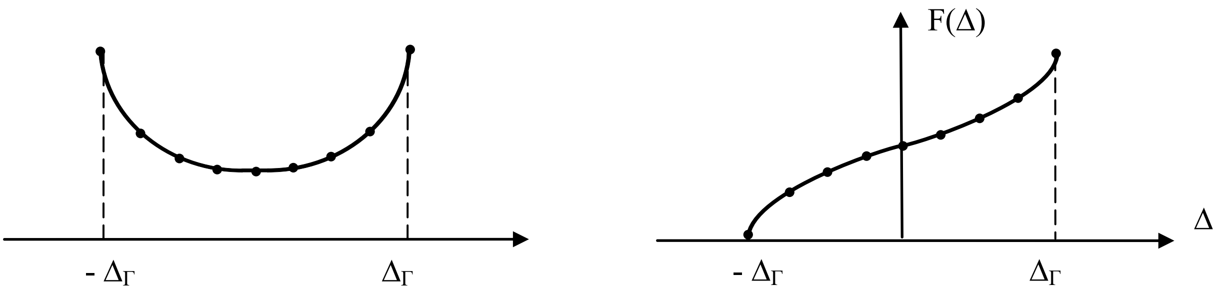


Рис.2.5. Графіки функцій арксинусного розподілу.

Так розподілені похибки від синусоїдних завад, похибки перекидання показуючи приладів з опорами на кернах. Такий розподіл одержують, якщо $\Delta = \Delta_{\tilde{A}} \cdot \sin\varphi$, де φ - рівномірно розподілена випадкова величина.

Функція розподілу ймовірності має вигляд:

$$F(\Delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\Delta}{\Delta_{\tilde{A}}}.$$

Точкові характеристики арксинусного розподілу:

- середнє квадратичне відхилення: $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right] = \Delta_{\tilde{A}} \big/ \sqrt{2} = \dfrac{\Delta_{\tilde{A}}}{1{,}4}$;

- коефіцієнт асиметрії: $\gamma_a = 0$;

- ексцес: $\varepsilon = 1{,}5$;

- коефіцієнт ексцесу: $\gamma_\varepsilon = -1{,}5.$

Інтервальні характеристики ($a\%$ -на і $(100-a)\%$ -на квантилі) для арксинусного розподілу можуть бути знайдені з наступних рівнянь:

$$F\left(\Delta_{a\%}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\Delta_{a\%}}{\Delta_{\tilde{A}}};$$

$$F\left(\Delta_{(100-a)\%}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\Delta_{(100-a)\%}}{\Delta_{\tilde{A}}};$$

$$\Delta_{a\%} = \Delta_{\tilde{A}} \cdot \sin\left\{\pi\left[F\left(\Delta_{a\%} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\};$$

$$\Delta_{(100-a)\%} = \Delta_{\tilde{A}} \cdot \sin\left\{\pi\left[F\left(\Delta(_{(100-a)\%} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}.$$

Якщо, наприклад, $\text{Ð}_{\text{äîâ}} = 0{,}95$, то границі довірчого інтервалу дорівнюють $\Delta_{2,5\%} = -0{,}997\Delta_{\hat{A}}$; $\Delta_{97,5\%} = 0{,}997\Delta_{\hat{A}}$.

2.5.8. Наближена оцінка границь довірчого інтервалу для одномодальних симетричних розподілів

Якщо функція щільності ймовірності симетрична, одномодальна, відмінна від нуля на скінченому інтервалі значень аргументу, то приблизне значення границь довірчого інтервалу (нижній і верхній) може бути знайдено по заданій імовірності у відповідності з [17]. В загальному вигляді при заданій довірчій ймовірності *P* границі довірчого інтервалу (без урахування знаку) можуть бути подані як:

$$|\Delta_l| = |\Delta_h| = K(P)\cdot\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right],$$

де $K(P)$- коефіцієнт, що залежить від форми розподілу і значення ймовірності *P*.

Для симетричних одномодальних зрізаних розподілів, частина з яких розглянута вище, може бути знайдена оцінка зверху для коефіцієнта Р. Позначимо її як $K_1(P)$. Графік коефіцієнта $K_1(P)= f(P)$ і похибки $\delta(P)$ у відсотках оцінювання коефіцієнта $K_1(P)$ наведено на рис.2.6.

Так, наприклад, для ймовірності $Đ= 0{,}95$, $K_1(P)= 2$.

Для порівняння наведемо точні значення коефіцієнта для симетричних одномодальних розподілів і рівномірного розподілу:

- Нормальний розподіл. Якщо $P_{äîâ} = 0{,}95 = 2\hat{O}(z)$, $\hat{O}(z)= 0{,}475$.

У відповідності з таблицею 2.1 $z = 1{,}96$, тобто $K_H(P)= 1{,}96$.

- Розподіл Симпсона при $\Delta_{\max} = \Delta_{\tilde{A}}$.

$$\text{Для } P_{äîâ} = 0{,}95 \quad |\Delta_{äîâ}| = 0{,}78\Delta_{\tilde{A}}.$$

$$\text{Тоді } K_1(P)= \frac{\Delta_{äîâ}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]} = \frac{0.78\Delta_{\tilde{A}}\cdot 2{,}4}{\Delta_{\tilde{A}}} = 1{,}87.$$

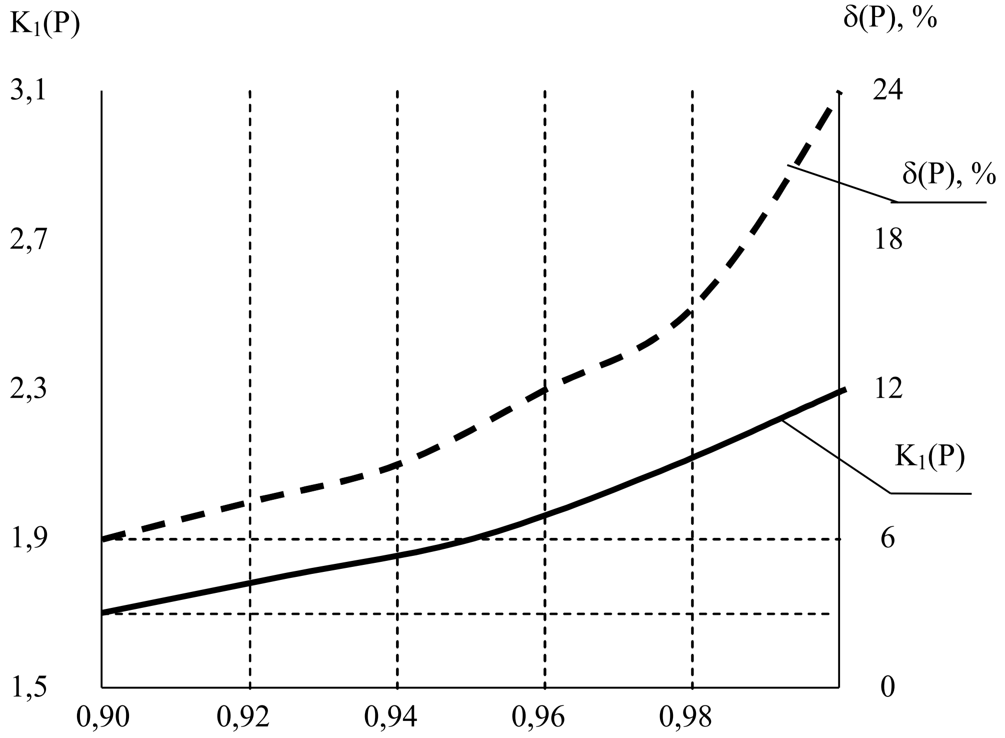


Рис.2.6. Графік залежності коефіцієнта $K_1(P)$ і похибки його оцінювання від довірчої ймовірності *P*.

- Рівномірний симетричний розподіл.

Для $P_{äîâ} = 0{,}95 \quad \left|\Delta_{äîâ}\right| = 0{,}95\Delta_{\hat{A}}$.

Тоді $K_1(P) = \dfrac{\Delta_{äîâ}}{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]} = \dfrac{0.95\Delta_{\tilde{A}} \cdot \sqrt{3}}{\Delta_{\tilde{A}}} = 1{,}64$.

Таким чином, графік $K_1(P)$ забезпечує оцінку зверху.

РОЗДІЛ 3. МОДЕЛІ ПОХИБОК ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ. НОРМУВАННЯ КЛАСІВ ТОЧНОСТІ

3.1. Моделі похибок засобів вимірювальної техніки

Моделі похибок засобів вимірювальної техніки (ЗВТ) повинні враховувати властивості похибок за зазначеною раніше класифікацією.

Модель похибки ЗВТ з урахуванням характеру зміни похибки (випадкова, систематична) і характеру залежності похибки від вимірюваної величини подається у вигляді многочленної формули [18].

Оскільки похибки трактуються як випадкові величини чи процеси, вичерпними характеристиками яких служать розподіли ймовірності їх значень, то розподіли (щільності ймовірності чи ймовірності) можуть бути безумовними, умовними, сумісними.

Многочленна модель абсолютної похибки має вигляд:

$$\Delta(x) = a + bx + cx^2 .... = a_x + b_s x + c_s x^2 + ... + \overset{0}{a} + \overset{0}{b} x + \overset{0}{c} x^2 + ...,$$

де $a_s, b_s, c_s, \overset{0}{a}, \overset{0}{b}, \overset{0}{c}$ –складові або коефіцієнти систематичних та випадкових похибок відповідно.

Многочленна модель відносної похибки має вигляд:

$$\delta(x) = \frac{a}{x} + b + cx + ... = \frac{a_s}{x} + b_x + c_s x + ... + \frac{\overset{0}{a}}{x} + \overset{0}{b} + \overset{0}{c}x + ...$$

Якщо визначити умовний розподіл як $p\left(\frac{\Delta}{x}\right)$ то умовне математичне сподівання та умовна дисперсія дорівнюють відповідно

$$M\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(x)\,p\left(\frac{\Delta}{x}\right)d\Delta;$$

$$\sigma^2\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\Delta(x)-M\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]\right\}^2 p\left(\frac{\Delta}{x}\right)d\Delta=M\left[\frac{\Delta^2(x)}{x}\right]-M^2\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right].$$

При нормуванні похибок ЗВТ приймають спрощену модель з урахуванням двох складових похибки - адитивної та мультиплікативної:

$$\begin{aligned}&\Delta(x)=a+bx=\Delta_a+\delta_M x=\Delta_a+\Delta_M;\\&\delta(x)=\frac{a}{x}+b=\frac{\Delta_a}{x}+\delta_M=\delta_a+\delta_M,\end{aligned}\qquad(3.1)$$

де Δ_a — абсолютна адитивна похибка; δ_M — відносна мультиплікативна похибка.

Залежності складових $\Delta_a, \delta_a, \Delta_M, \delta_M$ та сумарної похибки $\Delta(x), \delta(x)$ від вимірюваної величини наведені на рис. 3.1.

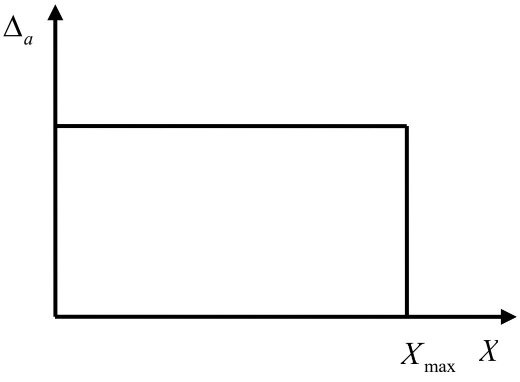
Якщо вважати систематичну похибку незмінною з часом $(a_s=const,\ b_s=const)$, то умовне математичне сподівання дорівнює:

$$M\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=a_s+b_s x=\Delta_{as}+\delta_{Ms}\cdot x,$$

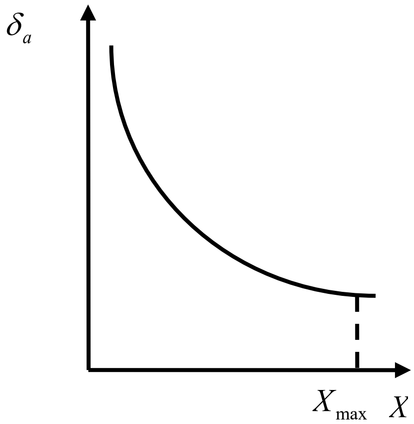
а умовна дисперсія визначається тільки характеристиками випадкових складових:

$$D\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=\sigma^2\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=M\left[\overset{0}{a}{}^2\right]+x^2M\left[\overset{0}{b}{}^2\right]+2x\,M\left[\overset{0}{a}\,\overset{0}{b}\right],$$

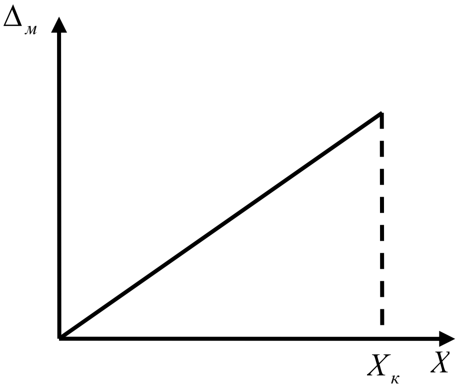
де $M\left[\overset{0}{a}\,\overset{0}{b}\right]$ — кореляційний момент, коваріація.



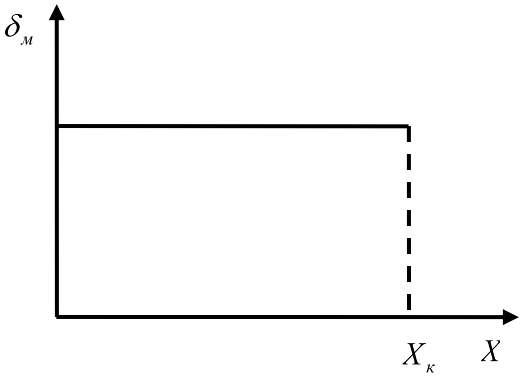
а) — абсолютна адитивна похибка



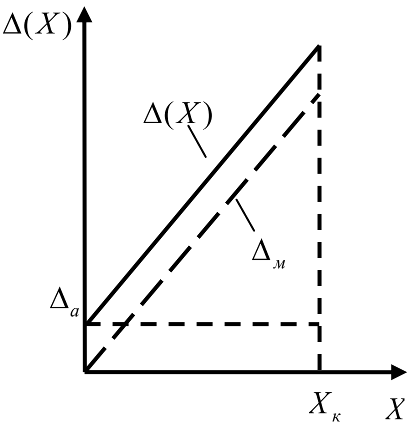
б) — відносна адитивна похибка



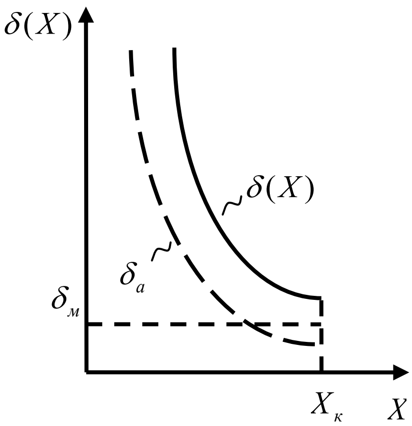
в) — абсолютна мультиплікативна похибка



г) — відносна мультиплікативна похибка



д) — абсолютна сумарна похибка



ж) — відносна сумарна похибка

Рисунок. 3.1 — Залежність похибок від значення вимірювальної величини.

Якщо прийняти

$$M\left[\overset{0}{a}{}^2\right]=\sigma^2\left[\overset{0}{a}\right];\ M\left[\overset{0}{b}{}^2\right]=\sigma^2\left[\overset{0}{b}\right];\quad M\left[\overset{0}{a}\overset{0}{b}\right]=\sigma\left[\overset{0}{a}\right]\cdot\sigma\left[\overset{0}{b}\right]\cdot r_{ab},$$

де r_{ab} — коефіцієнт кореляції $\overset{0}{a},\overset{0}{b}$, тоді

$$\sigma^2\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=\sigma^2\left[\overset{0}{a}\right]+x^2\sigma^2\left[\overset{0}{b}\right]+2x\cdot\sigma\left[\overset{0}{a}\right]\sigma\left[\overset{0}{b}\right]\cdot r_{ab}.$$

При незалежних $\overset{0}{a}$ і $\overset{0}{b}$ тобто при $r_{ab}=0$, отримуємо:

$$\sigma^2\left[\frac{\Delta(x)}{x}\right]=\sigma^2\left[\overset{0}{a}\right]+x^2\sigma^2\left[\overset{0}{b}\right]=\sigma^2\left[\overset{0}{\Delta}_a\right]+x^2\sigma^2\left[\delta_M\right].$$

Абсолютна похибка не залежить від вимірюваної величини і може бути охарактеризована безумовним розподілом. Те ж саме можна зазначити і для відносної мультиплікативної похибки. Тому при нормуванні характеристик похибки ЗВТ оцінюють окремо дві складових похибки: абсолютну адитивну і відносну мультиплікативну. Сумарну відносну похибку отримують за двохчленною формулою:

$$\delta=\delta_M+\frac{\Delta_a}{x}=\delta_M+\frac{\Delta_a\cdot x_H}{x\cdot x_H}=\delta_M+\gamma\cdot\frac{x_H}{x},$$

де $\gamma=\dfrac{\Delta_a}{x_H}$ — зведена похибка.

Якщо похибку ЗВТ визначають за великий інтервал часу, то для вирішення багатьох метрологічних задач використовується стаціонарна чи нестаціонарна модель випадкової похибки.

Перша модель (стаціонарна випадкова функція) найбільш проста, тому за її допомогою моделюють похибку, якщо нестаціонарністю можна зневажити.

Така модель передбачає постійну систематичну складову похибки Δ_s та випадкову складову похибки, що є стаціонарною функцією часу $\overset{0}{\Delta}(t)$:

$$\Delta(t)=\Delta_s+\overset{0}{\Delta}(t).$$

Тоді похибка ЗВТ характеризується математичним сподіванням $M[\Delta]$ та СКВ $\sigma[\Delta]$, що відповідно дорівнюють:

$$M[\Delta]=\Delta_s;\sigma[\Delta]=\sigma\left[\overset{0}{\Delta}\right].$$

З метою збільшення точності систематичну складову можна вилучити. Але від її неточного оцінювання залишається невилучена частина систематичної похибки, яка може бути охарактеризована границями інтервалу, в якому вона знаходиться з заданою ймовірністю, або СКВ $\sigma[\Delta_s]$. В останньому випадку СКВ похибки ЗВТ після вилучення систематичної похибки дорівнює:

$$\sigma[\Delta]=\sqrt{\sigma^2\left[\overset{0}{\Delta}\right]+\sigma^2[\Delta_s]},$$

при цьому математичне сподівання похибки дорівнює нулю.

Як модель похибки може бути використана функція, що є сумою стаціонарної випадкової величини та лінійної функції часу:

$$\Delta(t)=\Delta_s+b_s'\cdot t+\overset{0}{\Delta}(t).$$

Модель відображає вплив таких факторів, як старіння, лінійний дрейф, що викликають монотонну, близьку до лінійної, зміну похибки з часом.

Якщо похибку аналізують за великий проміжок часу, то її надають як суму двох стаціонарних випадкових функцій часу: «низькочастотної» $\overset{0}{\Delta}_{H\times}(t)$ і «високочастотної» $\overset{0}{\Delta}_{\hat{A}\times}(t)$:

$$\Delta(t)=\Delta_s+\overset{0}{\Delta}_{\acute{I}\times}(t)+\overset{0}{\Delta}_{\hat{A}\times}(t).$$

У цьому випадку характеристики похибки доповнюють нормалізованими автокореляційними функціями чи спектральними щільностями потужності.

Виходячи з частотного спектру похибки за низькочастотну складову вважають таку, автокореляційна функція якої затухає за інтервал часу, що менший часу проведення необхідних багаторазових вимірювань, але більший за час одного вимірювання. Автокореляційна функція високочастотної складової затухає за інтервал часу, що менший за час одного з багаторазових вимірювань.

Нормування метрологічних характеристик ЗВТ залежить від обраної моделі похибки. Наприклад, якщо суттєва випадкова похибка ЗВТ, характеристики систематичної і випадкової похибки нормують окремо.

Повний перелік метрологічних характеристик ЗВТ складається з характеристик таких груп:

- характеристики, що потрібні для визначення результату вимірювання;
- характеристики похибок ЗВТ;
- характеристики чутливості до впливових величин;
- динамічні характеристики ЗВТ;
- характеристики, що відображають здатність ЗВТ впливати на інструментальну складову похибки вимірювання внаслідок взаємодії ЗВТ з об’єктом вимірювання.

При нормуванні використовують характеристики похибок ЗВТ:

- основної систематичної Δ_{os};
- основної випадкової $\overset{0}{\Delta}_0$ (при суттєвості випадкової складової похибки);
- похибки від гістерезису H_0 (при суттєвості варіації);
- основної похибки Δ_0 (без розділення похибок на систематичні і випадкові).

Додаткові похибки визначають за допомогою характеристик чутливості ЗВТ до впливових величин і значень впливових величин.

Динамічні похибки знаходять за динамічними характеристиками ЗВТ і неінформативними параметрами вхідного вимірювального сигналу чи параметрами моделі об’єкту вимірювання.

3.2. Нормування класів точності засобів вимірювальної техніки

Якщо похибки ЗВТ нормують без розділення складових на систематичну і випадкову, для нормування характеристик похибки ЗВТ використовують клас точності.

Клас точності ЗВТ – узагальнена характеристика ЗВТ, що визначається границями основної і додаткової похибок, а також іншими властивостями ЗВТ, що викликають на його точність [19] . В [20] поняття «додаткова похибка» замінено поняттям «зміна показів». Клас точності ЗВТ хоча й характеризує властивості ЗВТ щодо точності, не є безпосереднім показником точності вимірювань, що виконують за його допомогою.

При нормуванні класів точності використовують наступні правила.

- Засобом вимірювання з двома або більше діапазонами вимірювання однієї і тієї ж величини допускається надавати два або більше класів точності.
- З метою обмеження номенклатури засобів вимірювання за точністю, для засобів вимірювання конкретного виду встановлюють обмежену кількість класів точності.
- Класи точності системних цифрових вимірювальних приладів з обчислювальними компонентами для обробки даних можна встановлювати без урахування числової обробки даних. Тоді похибки обчислювального компоненту вказують окремо.
- Якщо для засобу вимірювальної техніки встановлено декілька класів точності, то при необхідності можна встановити один, але той, що відповідає найбільшій похибці. Наприклад, клас точності набору мір визначається класом точності міри, з найбільшою похибкою.
- Засоби вимірювання, що призначені для вимірювання різних фізичних величин можуть мати різні класи точності для окремих величин.

Границі основної і додаткової похибок ЗВТ певного класу точності встановлюють у формі абсолютних, відносних або зведених похибок залежно від характеру їх зв’язку з вимірюваною величиною.

3.2.1 Нормування класу точності за відносною похибкою

Якщо ЗВТ характеризується тільки мультиплікативною похибкою, то вона, як абсолютна, лінійно залежить від вимірюваної величини. (рис. 3.1.в). Відносна мультиплікативна похибка стала і не залежить від вимірюваної величини (рис. 3.1г). Це використовують при нормуванні класу точності і клас точності є границя допустимої відносної похибку у відсотках. При цьому границю похибки закруглюють зверху до значення, що вибирають з стандартного ряду чисел. Стандартний ряд чисел наведений в [19], а також в нормативній документації для конкретних видів ЗВТ. Позначення класу точності при такому способі нормування розміщують в колі.

Таким чином нормується похибка масштабних перетворювачів (подільників напруги, шунтів, вимірювальних трансформаторів струму і напруги, тощо). При такому нормуванні відносна похибка однакова в усьому діапазоні вимірювання (рис. 3.1г) і дорівнює класу точності.

Але важко створити перетворювач, в якому повністю були б відсутні адитивні похибки. Це похибки від адитивних шумів, дрейфу шуму, похибки від тертя, від впливу завад, тощо. Вони неминучі для багатьох ЗВТ. В таких ситуаціях (за наявністю малих адитивних похибок) відносна похибка нормується одним числом в обмеженому діапазоні вимірюваної величини. При цьому з діапазону вимірювань вилучається його початкова частина (рис. 3.2).

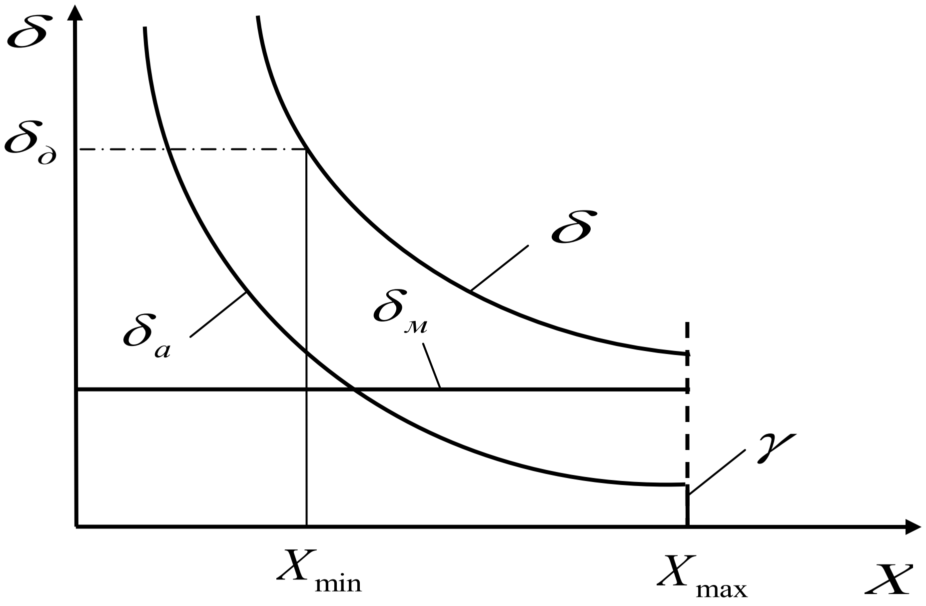


Рисунок 3.2 ─ Вилучення початкової частини діапазону вимірювання за наявністю малої адитивної похибки і нормування відносної похибки як класу точності.

Зведена адитивна похибка γ звичайно значно менша за відносну мультиплікативну похибку $\delta_М$. Але сумарна похибка $\delta = \delta_a + \delta_M$ зростає при зменшенні вимірюваної величини x . Якщо нормується допустима похибка $\delta_д$, то нижньою границею діапазону $x_{\min}$, є абсциса, що відповідає ординаті $\delta_{\ddot{A}} = \delta$. Тому для реальних ЗВТ, відносна похибка яких нормується одним числом, завжди вказують границі діапазону вимірювань $x_{\min}$, $x_{\max}$, для яких $\delta \le \delta_{ä}$.

Виходячи з цього формується визначення діапазону вимірювань.

Діапазон вимірювань – область значень величини, в межах якої виконується вимірювання з заданою похибкою.

За [20], діапазон вимірювань (ефективний діапазон) – діапазон, що визначений двома значеннями вимірюваної величини, усередині якого встановлені границі похибки вимірювального приладу.

3.2.2. Нормування класу точності за зведеною похибкою

Якщо ЗВТ характеризується тільки адитивною похибкою, то вона, як абсолютна, не залежить від вимірюваної величини (рис. 3.1а). Але нормувати абсолютну похибку незручно, бо вона виражена в одиницях вимірюваної величини. Тому нормують зведену похибку γ, що є відношенням абсолютної похибки Δ до нормованого значення x_H. Клас точності визначають за зведеною похибкою у відсотках, при цьому границю похибки заокруглюють зверху до значення, що вибирають з стандартного ряду чисел. За класом точності, тобто за значенням γ , визначають абсолютну і відносну похибку вимірювання:

$$\Delta = \gamma \cdot x_H \,; \delta = \gamma \cdot \frac{x_H}{x}. \tag{3.2}$$

З формули (3.2) видно, що клас точності є мінімальною похибкою ЗВТ, що дорівнює відносній при $x = x_H$. Для інших значень $x < x_H$ відносна похибка буде більшою за зведену і буде значною при малих x . Якщо встановити x_{i} , що дорівнює максимальному значенню діапазону, то при $x = \frac{x_H}{2}$ відносна похибка δ буде дорівнювати 2γ, при $x = \frac{x_H}{10}$ відносна похибка δ=10γ, при подальшому зменшенні x відносна похибка δ наближається до нескінченності.

Для характеристики ЗВТ вводять поняття порогу чутливості. ***Поріг чутливості ЗВТ*** $x_{ï÷}$ ***це найменше значення вимірюваної величини, яка може бути виявлена ЗВТ***. З цього виходить визначення діапазону показів ЗВ, нижньою границею якого є $x_{ï÷}$, а верхньою $x_{\max}$.

Діапазон показів засобу вимірювання – область значень вимірюваної величини яка обмежена початковим і кінцевим її значеннями. Якщо порогом чутливості зневажають, границі діапазону показів $[0, x_{\max}]$.

Діапазон вимірювань, як правило, менший і має границі: нижню $x_{\min}$ і верхню $x_{\max}$, де нижня границя, або початок діапазону, $x_{\min}$ відповідає $\delta \le \delta_д$ Значення $\delta_д$ встановлюють згідно з конкретною задачею вимірювання (рис. 3.3).

Для визначення похибки вимірювання за класом точності γ згідно з формулою (3.2) потрібно знати нормоване значення вимірюваної величини, що його встановлюють за [19].

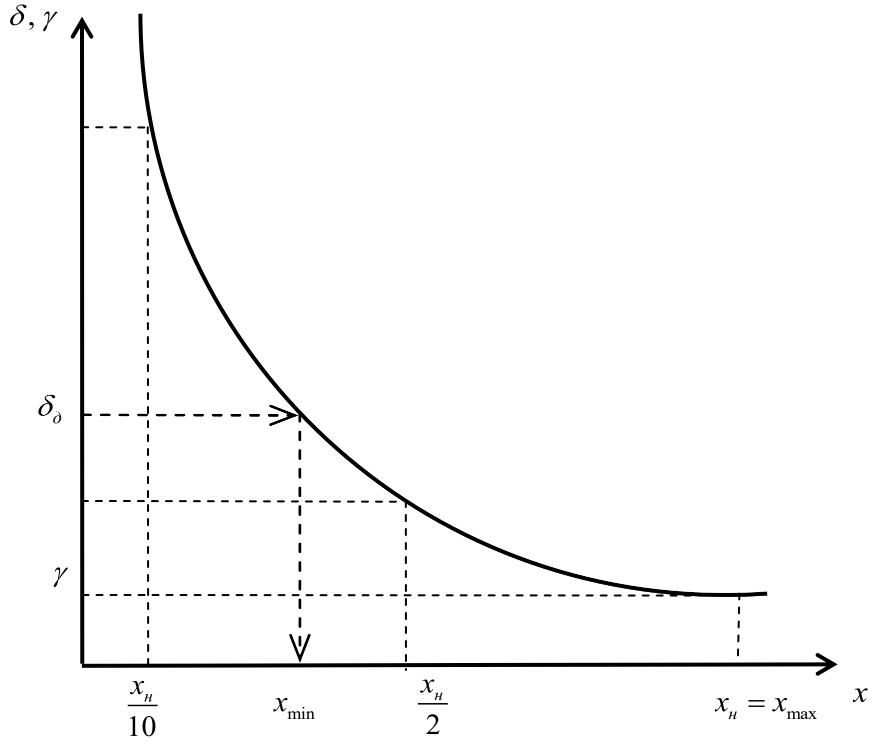


Рисунок 3.3 ─ Формування діапазону показів і діапазону вимірювань при наявності адитивної похибки і нормування зведеної похибки.

Нормоване значення x_j для ЗВ з рівномірною, практично рівномірною чи степеневою шкалою, а також для вимірювальних перетворювачів, якщо нульове значення вхідного (вихідного) сигналу знаходиться з краю або зовні діапазону показів, встановлюють таким, що дорівнює більший з границь діапазону показів чи таким, що дорівнює більшому з модулів границь діапазону показів, якщо нульове значення знаходиться усередині діапазону показів.

Для електровимірювальних приладів з рівномірною, практично рівномірною чи степеневою шкалою і нульовою відміткою усередині діапазону показів нормоване значення x_l допускається встановлювати таким, що дорівнює сумі модулів границь діапазону показів.

Для засобів вимірювання фізичної величини, для яких прийнята шкала з умовним нулем, нормоване значення встановлюють таким, що дорівнює модулю різниці границь діапазону показів.

Для ЗВ з встановленим номінальним значенням нормоване значення дорівнює цьому номінальному значенню.

Для вимірювальних приладів з істотно нерівномірною шкалою нормоване значення x_l встановлюють таким, що дорівнює довжині шкали або її частки, яка відповідає діапазону показів. У цьому випадку межі абсолютної похибки виражають, як і довжину шкали, в одиницях довжини.

3.2.3. Нормування класу точності за двома складовими похибки

При наявності обох складових похибки (адитивної і мультиплікативної рис. 3.1д,ж) абсолютну і відносну сумарну похибку характеризують співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &\Delta = \Delta_a + \Delta_M = \Delta_a + \delta_M \cdot x; \\ &\delta = \delta_M + \Delta_a = \delta_M + \frac{\Delta}{x} \cdot \frac{x_H}{x_H} = \delta_M + \gamma \cdot \frac{x_H}{x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким чином нормуванню підлягають сталі характеристики похибок: відносна мультиплікативна $\delta_м$ і зведена адитивна γ . В стандарті [19] відносну похибку нормують за формою:

$$\delta = \pm\left[c + d\left(\left|\frac{x_H}{x}\right| - 1\right)\right]\%,$$

де c, d ─ числа, що відповідають стандартному ряду. Значення c і , d отримують заокругленням зверху від похибки в кінці діапазону $\delta_M + \gamma$ δ і зведеної адитивної γ відповідно. Позначення класу точності складається з двох чисел c/d.

Стандартний ряд чисел, що використовується для нормування класів точності становить: [1; 1,5; (1,6); 2; 2,5; (3); 4; 5; (6)]$\times 10^n$, де n=1, 0, -1, -2,… .

Числа в круглих дужках не використовують для ЗВТ, що розробляються заново. В нормативно – технічній документації для конкретних ЗВТ вказують стандартні ряди чисел для встановлення класів точності цих ЗВТ. Наприклад, для аналогових електровимірювальних приладів прямої дії згідно [20] наведено наступний ряд чисел для встановлення класів точності: 0,15; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 5.

Для ЗВТ, границі допустимої основної похибки яких подають у формі абсолютних похибок: $\Delta = \pm\, a; \Delta = \pm(a + bx),$ чи відносних похибок у вигляді графіка, таблиці, чи формули, що не збігається з (3.3), класи точності позначають великими літерами латинського алфавіту чи римськими цифрами.

3.2.4. Позначення класів точності ЗВТ та правила нормування складових похибки

Позначення класів точності ЗВТ в нормативно-технічній документації і безпосередньо на ЗВТ наведені в таблиці 3.1.

Клас точності визначається за характеристиками основної та додаткової похибки (зміни показів під дією впливових величин).

Границі допустимої додаткової похибки ЗВТ встановлюють у вигляді:

- сталих значень для всієї області значень впливової величини або сталих значень для інтервалів області;

- відношення границі допустимої додаткової похибки, що відповідає регламентованому інтервалу значень впливової величини, до ширини цього інтервалу ;
- граничної функції впливу, як залежності границі допустимої додаткової похибки від впливової величини;
- функціональної залежності границь допустимих відхилень від номінальної функції впливу.

Звичайно границі допустимої додаткової похибки встановлюють як часткове або кратне значення границі допустимої основної похибки.

Границі допустимих похибок подаються не більше ніж двома значущими цифрами, причому похибка заокруглення при обчисленні границь має бути не більше 5%.

Окрім наведених вище способів нормування похибок використовуються і більш складні форми. Наприклад, у деяких мостів для вимірювання опорів використовується тричленні формула похибки:

$$\delta = \frac{x_{\min}}{x} + \delta_M + \frac{x}{x_{\max}}.$$

Але в технічній документації на широкодіапазонні прилади замість тричленної формули наводять піддіапазони величини, в яких похибка вимірювання не перевищує допустиму. В [15] наведено приклад такого нормування. Похибка моста не перевищує $\delta_{доп}$ = 0,5% в піддіапазоні $10^2 \div 10^4$ Ом; $\delta_{доп}$ = 1% в піддіапазоні $5 \div 10^5$ Ом; $\delta_{доп}$ = 5% в піддіапазоні $0,2 \div 2 \cdot 10^6$ Ом; $\delta_{доп}$ = 20% в діапазоні $0,1 \div 4 \cdot 10^6$ Ом. Тричленна формула для такої похибки має коефіцієнти:

$$\delta = 100\left[\frac{0.02}{x} + 5 \cdot 10^{-3} + \frac{x}{20 \cdot 10^6}\right]\%.$$

Таблиця 3.1. ─ Позначення класів точності ЗВТ в нормативно-технічній документації і на ЗВТ [19], [20].

Границі допустимої основної похибки		Позначення класів точності	
Формула	Приклад	В документації	На ЗВТ
Зведена похибка за умов якщо: ***нормоване значення в одиницях величини на вході (виході) ЗВТ;***			
$\gamma = \dfrac{\Delta(x)}{x_H} = \pm p$	$\gamma = \pm 1.0\%$	$\gamma = \pm 1.0\%$ клас точності 1	1
нормоване значення в одиницях величини відповідає інтервалу вимірювання (діапазону показів);			
--«--	--«--	клас точності |1|	|1|
нормоване значення: довжина шкали або її частки			
$\gamma = \dfrac{\Delta(L)}{L} = \pm p$	$\gamma = \pm 0.5$	клас точності $\overset{0,5}{\bigvee}$	$\overset{0,5}{\bigvee}$ *
Відносна похибка			
$\delta = \dfrac{\Delta}{x} = \pm q$	$\delta = 0{,}5\%$	0,5 клас точності	0,5
Відносна похибка з нормуванням двох складових			
$\delta = \pm\left[c + d \times \left(\left\|\dfrac{x_H}{x}\right\| - 1\right.\right.$	$\delta = \pm\left[0.02 + 0.01 \times \left(\left\|\dfrac{x_H}{x}\right\| - 1\right.\right.$	клас точності **0.02/0.01**	**0.02/0.01**
Абсолютна похибка			
$\Delta = \pm a$ $\Delta = \pm(a + bx)$	$\Delta = \pm 0{,}5\ Ом$ $\Delta = \pm(0{,}5 + 0{,}01x)Ом$	клас точності **М**	**М**
Відносна похибка			
Графік, таблиця, формула для відносної похибки		клас точності **С**	**С**

∗ Таке нормування і позначення класу точності не рекомендовано для засобів вимірювання, які розробляються після 1993 року.

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ І СПОСОБИ ВИЯВЛЕННЯ СИСТЕМАТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПОХИБКИ

При проектуванні ЗВТ підвищення точності може бути досягнуто за допомогою застосування високостабільних, високоточних елементів, за допомогою вибору конструкцій з мінімальними похибками, досконалої технології і матеріалів деталей ЗВТ, збільшення кількості ступенів квантування, зменшення похибки відліку, тощо.

Але, якщо такий шлях не дозволяє досягти необхідної точності чи підвищення точності приводить до погіршення інших техніко – економічних показників (збільшення вартості, габаритів, тощо), при проектуванні ЗВТ та при вимірюваннях, використовують спеціальні методи підвищення точності.

Методи підвищення точності вимірювань є сукупністю прийомів використання додаткових ЗВТ, технічних засобів, вимірювань та обчислень з метою зменшення похибки вимірювань.

4.1. Класифікація методів підвищення точності

Класифікація методів підвищення точності за суттєвими ознаками подана на рис. 4.1. В методах підвищення точності вимірювань можуть бути виділені дві групи:

- методи, засновані на запобіганні вже існуючих похибок (профілактика);
- методи, засновані на зменшенні вже існуючих похибок (лікування).

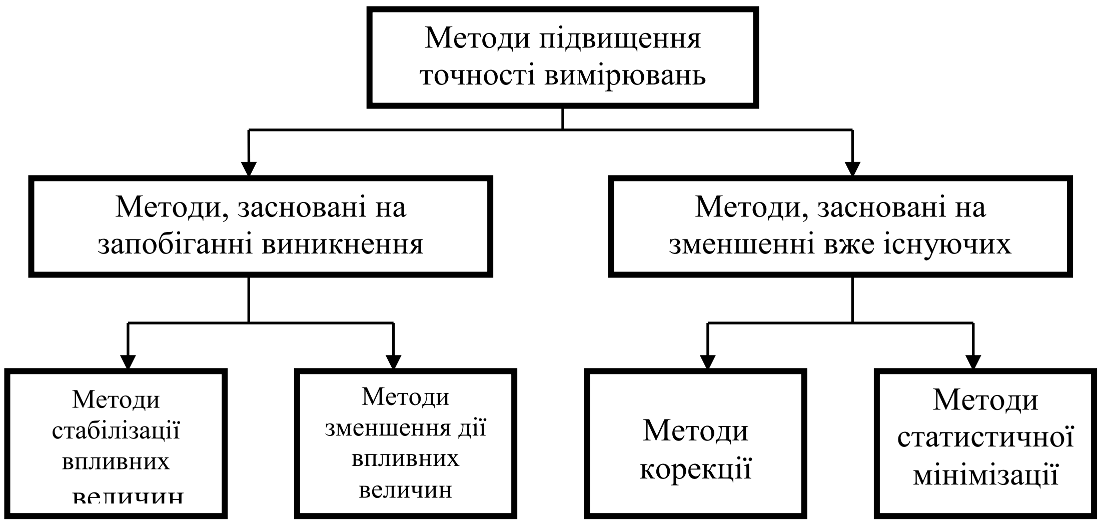


Рис. 4.1. Класифікація методів підвищення точності.

4.1.1. Методи підвищення точності, засновані на запобіганні виникнення похибок

Ці методи підвищення точності запобігають появі похибок, вище допустимих, шляхом зменшення дії зовнішніх і змін внутрішніх впливових величин в локалізованому просторі і, в свою чергу, класифікуються за способом реалізації на методи:

- стабілізації впливових величин (термостатування, стабілізація напруги живлення, стабілізація частоти живлення);
- зменшення дії зовнішніх та внутрішніх впливових величин (екранування від магнітних та електричних полів, амортизація, встановлення рівня).

Якщо подати похибку від дії зовнішньої виливної величини, як лінійну функцію впливу (добуток коефіцієнту впливу та виливної величини чи її зміни), то при проектуванні з метою підвищення точності зменшують коефіцієнт впливу, а з використанням методів підвищення точності саму впливову чи її зміну (без зміни коефіцієнту впливу).

4.1.2. Методи підвищення точності, засновані на зменшенні існуючої похибки

Ці методи підвищення точності можна розподілити за характером похибки, яка усувається, на методи корекції і статистичної мінімізації.

Методи статистичної мінімізації використовуються в основному для зменшення випадкової складової похибки. Основою статистичної мінімізації є усереднення результатів вимірювань чи перетворень, що містять в собі випадкові і незалежні похибки. Використовують усереднення часове, що реалізується багаторазовими вимірюваннями через інтервал часу, що перевищує інтервал кореляції похибки, і просторове, що реалізується за допомогою декількох ЗВ з незалежними випадковими похибками.

Методи корекції можуть бути використані для зменшення і систематичної і випадкової складових похибки.

За шляхом реалізації розрізняють два основних методи корекції:

- з використанням перетворення зовнішніх дій чи неінформативних параметрів, що спричинюють похибку, в інші фізичні величини з метою їх використання для підвищення точності результату вимірювання чи вимірювального перетворення;
- з виявленням похибки, що виникла, за допомогою зразкових чи надлишкових ЗВТ для її подальшого використання з метою підвищення точності результату вимірювання чи вимірювального перетворення.

Методи підвищення точності, що спрямовані на зменшення похибки від дії впливових величин, можна розподілити на інваріантні, іноцентні та мінімізуючи похибку [21].

При використанні інваріантних методів підвищення точності ЗВ інваріантно до відповідної впливової величини, тобто похибка дорівнює нулю [11].

Якщо подати похибку від дії виливної величини у вигляді:

$$\Delta = \Psi\left(\xi - \xi_{ref}\right),$$

де $\Psi(\xi)$ - функція впливу, ξ - значення виливної величини; ξ_{ref} - нормальне значення виливної величини, то в інваріантних методах

$$\Psi\left(\xi - \xi_{ref}\right) = 0.$$

Якщо подати функцію впливу як степеневий поліном:

$$\Delta = a\left(\xi - \xi_{ref}\right) + b\left(\xi - \xi_{ref}\right)^2 + c\left(\xi - \xi_{ref}\right)^3 + \cdots,$$

То при використанні іноцентних методів підвищення точності залишаться складові:

$$\Delta' = b\left(\xi - \xi_{ref}\right)^2 + c\left(\xi - \xi_{ref}\right)^3 + \cdots.$$

При мінімізуючих методах підвищення точності значення $\Psi\left(\xi - \xi_{ref}\right) = 0$ зменшується до допустимого рівня.

4.2. Методи корекції систематичної складової похибки

Природні методи вилучення систематичної похибки – це методи, засновані на принципі запобігання виникнення похибок. Але, якщо систематична похибка є, то для її вилучення найчастіше використовують методи корекції. Методи корекції в свою чергу використовують надлишковість, тобто для реалізації корекції крім одного основного вимірювання потрібно ще мінімум одне для виправлення результату вимірювання.

4.2.1. Методи корекції постійної систематичної похибки

Методи корекції постійної систематичної похибки можуть використовувати заміщення, зміну знаку систематичної похибки чи вхідної величини, тощо [3].

Систематичну похибку можна вилучити з використанням методу заміщення, якщо у розпорядженні експериментатора є регульована міра, вихідна величина якої однорідна з вхідною величиною засобу вимірювання.

Спосіб зміни знаку систематичної похибки Δ_S може бути змінений при збереженні знаку вимірюваної величини x. При цьому компенсується похибка від дії виливної величини.

Вимірювання проводять в два етапи, причому на другому етапі з протилежним напрямом зовнішньої виливної величини. При цьому зі зміною знаку виливної величини повинен змінитися і знак систематичної похибки.

Результат вимірювання на першому етапі:

$$x' = x + \Delta_S \tag{4.1}$$

Результат вимірювання на другому етапі після зміни знаку виливної величини чи напряму її дії на ЗВ:

$$x'' = x - \Delta_S \; . \tag{4.2}$$

Результат вимірювання з вилученням систематичної похибки отримують як:

$$x = \frac{x' + x''}{2} \; . \tag{4.3}$$

Таким чином вилучають похибку від дії зовнішніх магнітних полів. В астатичному приладі (тобто в приладі, що не залежить від просторового положення) вимірювальний механізм складається з двох однакових частин, що дозволяє автоматизувати наведені вище етапи по вилученню систематичної похибки. На кожну з однакових частин цього механізму зовнішнє магнітне поле діє протилежно, тобто реалізуються рівняння

(4.1), (4.2). Об'єднання цих частин в одному механізмі дозволяє реалізувати рівняння (4.3), тобто одержання виправленого результату *x*. За моделлю реалізації цей засіб інваріантний.

Цим способом можна вилучити постійну систематичну похибку в компараторах, ватметрах, мостових вимірювальних пристроях. Розглянемо приклад вилучення постійної систематичної похибки в рівноплечому мості (рис.4.2). Останній використовується при вимірюванні r_x за допомогою регульованої міри r_0 . Якщо міст рівноплечий, то r_1 вибирають таким, що дорівнює r_2 . Результат вимірювання при зрівноваженні мостової схеми:

$$r_x = r_0 \cdot \frac{r_2}{r_1} = r_0 \,.$$

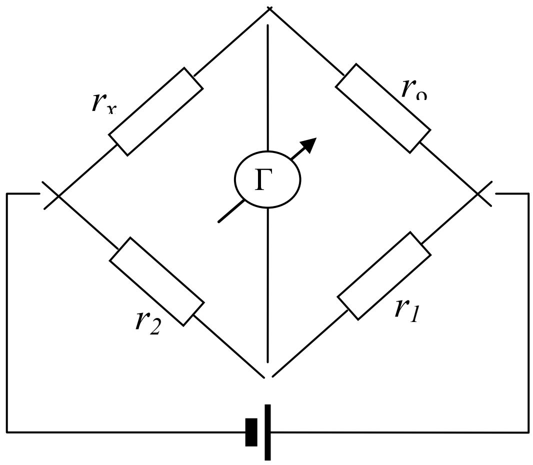


Рисунок 4.2─ Мостова схема для вимірювання опору. На рисунку позначено: Г-гальванометр.

Але в дійсності за умов наявності невідомої нам постійної систематичної похибки $r_2 \neq r_1$, точніше $r_2 = r_1(1+\delta_S)$. Тоді в результаті вимірювання отримуємо:

$$r_x^{'} = r_0(1+\delta_S) = r_0 + r_0\delta_S .$$

Для того, щоб вилучити похибку $\Delta_S = r_0\delta_S$ виконують друге вимірювання, але при цьому плечі мостової схеми r_1 і r_2 міняють місцями і одержують результат:

$$r_x^{''} = \frac{r_0}{(1+\delta_S)} = r_0 - r_0\delta_S + r_0\delta_S^2 - r_0\delta_S^3 + \dots .$$

Значення вимірюваної величини знаходять за допомогою підсумовування $r_x^{'}$ і $r_x^{''}$:

$$r_x = \frac{1}{2}\left(r_x^{'} + r_x^{''}\right) = r_0 + r_0\delta_S^2 - r_0\delta_S^3 + \dots .$$

Якщо похибка δ_S мала, то невилучена систематична похибка $\delta_{SH} = \delta_S^2 - \delta_S^3 + \dots$ є величиною вищого порядку малості і нею нехтують. За моделлю реалізації цей спосіб іноцентний, тому що після корекції залишаються похибки другого і більш високого порядків.

Замінивши алгоритм об’єднання результатів $r_x^{'}$ і $r_x^{''}$ на $r_x = \sqrt{r_x^{'} \cdot r_x^{''}}$ можна отримати інваріантний метод підвищення точності.

Спосіб інвертування вхідної і вихідної величини заснований на можливості зміни знаку вимірюваної величини при збереженні знаку і значення систематичної похибки. Результат першого вимірювання:

$$x^{'} = x + \Delta_S .$$

Змінюючи знак вимірюваної величини *x* на зворотній, отримуємо:

$$-x^{''} = -x + \Delta_S \; .$$

Тоді виправлений результат вимірювання:

$$x = \frac{x' - x''}{2} \; .$$

Прикладом такого способу корекції систематичної похибки є вилучення похибки компенсатора постійного струму від контактних термо – е.д.с. ΔE_K за допомогою зміни полярності джерела живлення
компенсатора і вимірюваної е.д.с. E_x.

Вимірювання проводять в два етапи. На першому етапі результат вимірювання:

$$N_1 \cdot \Delta U_K = E_x + \Delta E_K \; ,$$

де N_1 - числове значення, ΔU_K - ступінь регульованої міри.

На другому етапі при зміні полярності:

$$N_2 \cdot \Delta U_K = -E_x + \Delta E_K .$$

Тоді виправлений результат вимірювання:

$$E_x = \frac{\left(N_1 - N_2\right) \cdot \Delta U_K}{2} \; .$$

Отже похибка від дії ΔE_K в виправлений результат не входить. В високочутливих цифрових вольтметрах постійного струму така корекція може виконуватись автоматично. Слід мати на увазі, що при вилученні систематичної складової похибки зі зміною її знаку чи знаку вимірюваної величини трудомісткість збільшується. Але при великій швидкості автоматизовані варіанти способу інвертування широко запроваджуються в вимірювальній техніці.

Розглянемо приклад корекції постійної систематичної похибки ЗВ за допомогою зразкових надлишкових ЗВТ.

Якщо характеристики ЗВ нелінійна, то для реалізації методу корекції потрібна багатозначно кодокерована міра (ЦАП) в зворотному колі [3] і алгоритм обчислення виправленого (скоректованого) результату вимірювання.

Структурна схема ЗВ з автоматичною корекцією систематичної похибки наведена на рис.4.3.

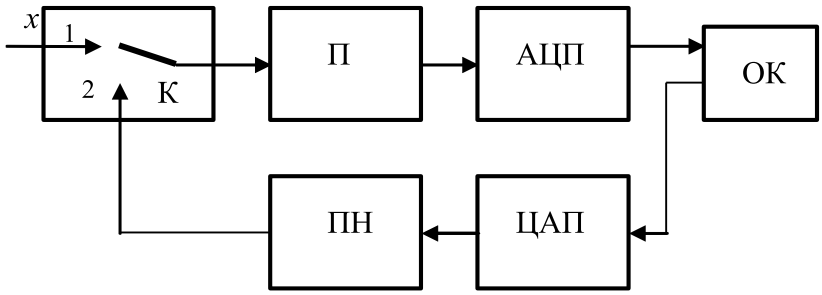


Рис.4.3. Структурна схема ЗВ з корекцією систематичної похибки.

ЗВ включає комутатор ***К***, підсилювач ***П***, аналого-цифровий перетворювач ***АЦП***, обчислювальний компонент ***ОК***, багатозначну кодокеровану міру ***ЦАП*** і подільник напруг ***ПН***. Для корекції використовується додатковий такт вимірювання.

Перший такт вимірювання виконується в положенні комутатора 1. Числове значення вимірюваної величини на виході АЦП $N_y = K \cdot x$ (якщо знехтувати ступінчастістю характеристики $N_y = f(x)$). Якщо значення коефіцієнту перетворення *К* не дорівнює номінальному K_{Sf} і мають місце адитивні похибки, то числове значення N_y з урахуванням похибок становить:

$$N_y{}' = K_{Sf}\left(1+\delta\right)\cdot\left(x+\Delta x\right),$$

де $\delta = \dfrac{K}{K_{Sf}} - 1$ - мультиплікативна складова похибки, Δx - зведена до входу ЗВ адитивна складова похибки.

В такті корекції комутатор встановлюють в положення 2 і від ОК код $N_y{}'$ подають на вхід АЦП. Коефіцієнт перетворення у зворотному колі дорівнює $\dfrac{1}{K_{Sf}}$. Тоді код на виході АЦП, відповідає такту корекції, дорівнює:

$$N_{yK}{}' = \left\{\left(1+\delta\right)\cdot\left(x+\Delta x\right)+\Delta x\right\}K_{Sf}\left(1+\delta\right) = K_{Sf}\left(1+\delta\right)^2 x + K_{Sf}\left(2+\delta\right)\cdot\left(1+\delta\right)\Delta x$$

.

ОК обчислює скоректоване значення коду за алгоритмом:

$$N_y{}'' = 2N_y' - N_{yK}' = K_{Sf}\cdot x - \delta^2 K_{Sf}\cdot x - \delta\cdot K_{Sf}\left(1+\delta\right)\cdot\Delta x\ .$$

З отриманого виразу видно, що адитивна і мультиплікативна похибка вилучені. Після корекції залишились тільки складові другого і третього порядків малості. Цей метод корекції іноцентний.

Для корекції результату вимірювання може використовуватись поправка. Поправка – це значення величини, однорідної з вимірюваною, яке підсумовують зі значенням вимірюваної величини з метою вилучення систематичної похибки. При введенні поправки справедливе рівняння:

$$x' = x + \Delta_S\ ,$$

де x' - результат вимірювання з систематичною похибкою (невиправлений результат).

Тоді за відомою систематичною похибкою виправлений результат:

$$x = x' - \Delta_S = x' + \Delta_{ї} \; ,$$

де $\Delta_{ї}$ - поправка.

Поправка це похибка зі зворотним знаком $\Delta_{ї} = -\Delta_{\mathrm{S}}$. Якщо $\Delta_{ї} = -\Delta_{\mathrm{S}}$, то систематична похибка вилучається повністю. Для вилучення систематичної похибки необхідно знати значення виливної величини, що спричиняє похибку, і залежність похибки від виливної величини, що спричиняє похибку, і залежність похибки від виливної величини у вигляді формули, графіка, таблиці, тобто функцію впливу. Але функція впливу, як правило, відома чи у вигляді номінальної з можливими відхиленнями в неї чи у вигляді граничної функції. Тому поправка може бути відома з обмеженою точністю. Її можна характеризувати статистично у вигляді середнього значення $\overline{\Delta}_{ї}$ і СКВ $\sigma\left[\Delta_{ї}\right]$. Тоді з введенням поправки в результат систематична складова похибки зменшується, а дисперсія і відповідно стандартна невизначеність зростає. Прагнуть до того, щоб при введенні певної поправки $\Delta_{П}$ з відомим $\sigma\left[\Delta_{П}\right]$ збільшення довірчого інтервалу результату вимірювання від введення поправки при певній ймовірності не перебільшило саму поправку.

Для цього необхідно, щоб

$$\Delta_{П} \geq z\sqrt{\sigma^2\left[\Delta\right] + \sigma^2\left[\Delta_{П}\right]} - \sigma\left[\Delta\right],$$

де $\sigma\left[\Delta_{ї}\right]$ - СКВ результату вимірювання (стандартна невизначеність) до введення поправки, z - коефіцієнт, що відповідає довірчій ймовірності $P = 2\hat{O}(\mathrm{z})$, $\hat{O}(\mathrm{z})$ - функція Лапласа.

Приймаючи до уваги необхідність заокруглення невизначеності результату, а також те, що невизначеність подають не більше як двома значущими десятковими розрядами, вилучення систематичної складові похибки, що менша ніж половина одиниці молодшого розряду невизначеності результату недоцільно.

Одна поправка вилучає тільки одну складову систематичної похибки. Тому при наявності багатьох впливових величин іноді доводиться вводити велику кількість поправок. При цьому сумарна дисперсія поправок збільшується і внаслідок збільшується дисперсія результату вимірювання тобто його невизначеність. Ту частину систематичної похибки, що залишається після внесення поправок, називають невилученою систематичною похибкою.

Якщо при багаторазових вимірюваннях є можливість випадково змінювати причину систематичної похибки, то систематична похибка набуває якостей випадкової і може бути зменшена методом статистичної мінімізації. Його доцільно використовувати в тих випадках, коли для зменшення випадкової похибки використовують статистичну мінімізацію, якою можна скористатися і для зменшення систематичної рандомізованої похибки. Для рандомізації систематичної складової похибки її змінюють при кожному багаторазовому вимірюванні. Потім знаходять результат – середнє арифметичне. Якщо виконано n вимірювань, тоді СКВ невилученої систематичної похибки зменшується в $\sqrt{n}$ разів.

4.2.2. Методи корекції змінної систематичної похибки

Для вилучення систематичної прогресивної похибки використовують метод симетричних вимірювань. Розглянемо приклад усунення систематичної мультиплікативної похибки вимірювального приладу, яка змінюється лінійно з часом. Для вилучення похибки використовується апаратурна надлишковість (використовується однозначна нерегульована міра, що відтворює величину x_0, однорідну з вимірюваною) і часова надлишковість: процедури вимірювання виконують в три етапи. Окремі вимірювання (етапи) проводять через певний проміжок часу T. На першому етапі вимірюють величину x_0 і отримують результат:

$$x_1 = x_0 + \Delta_{S0},$$

де Δ_{S0} - початкове значення похибки.

На другому етапі підключають вимірювану величину і отримують результат:

$$x_2 = x + \frac{\partial \delta_S}{\partial t} T \cdot x + \Delta_{S0},$$

де $\frac{\partial \delta_S}{\partial t}$ - швидкість зміни систематичної складової похибки з часом.

На третьому етапі знову вимірюють величину x_0 і отримують результат:

$$x_3 = x_0 + \frac{\partial \delta_S}{\partial t} \cdot 2T \cdot x_0 + \Delta_{S0} .$$

У цьому випадку прогресивну мультиплікативну похибку вилучають за формулою:

$$x = \frac{x_2 - x_1 + x_0}{x_3 - x_1 + 2x_0} \cdot 2x_0 .$$

Якщо систематична похибка змінюється періодично, то для її вилучення (при вимірюванні постійної величини) може бути використаний метод періодичних вимірювань. Апріорною інформацією при використанні цього методу є період, за яким змінюється похибка. Для вилучення періодичної похибки виконують два вимірювання через інтервал часу, що дорівнює половині періоду, за яким змінюється похибка. Тоді в двох вимірюваннях систематичної похибки рівні за значенням і протилежні за знаком. Для обчислення результату знаходять середнє і вилучають похибку.

4.3. Метод статистичної мінімізації

Методи зменшення випадкової складової похибки вимірювання засновані на статистичній мінімізації. При статистичній мінімізації результати багаторазових вимірювань обробляють у відповідності з обраним алгоритмом.

Результат вимірювання отримують за умов мінімуму похибки. Цій умові для більшості розподілів випадкових похибок відповідає математичне сподівання $M[x]$ і його оцінка – середнє арифметичне.

$$\bar{x} = \widetilde{M}[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (4.4)$$

При відсутності систематичної похибки і постійному значенні вимірюваної величини:

$$x_i = x_{зñò} + \overset{\circ}{\Delta}_i \ , \qquad (4.5)$$

де $x_{зñò}$ - істинне значення величини; $\overset{\circ}{\Delta}_i$ - випадкова похибка i –го вимірювання.

Тоді з використанням (4.4) і (4.5) отримуємо результат вимірювання:

$$\bar{x} = x_{зñò} + \overset{\circ}{\Delta}_p \, , \qquad (4.6)$$

де $\overset{\circ}{\Delta}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{\Delta}_i$ - випадкова похибка результату вимірювання.

В багаторазових вимірюваннях випадкові похибки розподілені нормально. Нормальний розподіл симетричний, тому в сумі значення випадкових похибок частково компенсується. Середнє арифметичне є слушною і незсуненою оцінкою істинного значення вимірюваної величини. Таким чином, при відсутності систематичної похибки, середнє арифметичне, що його приймають за результат вимірювання, характеризується середнім квадратичним відхиленням:

$$\sigma[\bar{x}] = \sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_p\right] .$$

Знайдемо $\sigma[\bar{x}]$ з використанням (4.6) за умов, коли генеральне СКВ результатів вимірювань відоме і дорівнює $\sigma[x] = \sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]$.

$$D[\bar{x}] = Д\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\Delta}_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Д\left[\overset{\circ}{\Delta}\right] = \frac{n \cdot \sigma^2\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}{n^2} = \frac{\sigma^2[\Delta]}{n}.$$

$$\sigma[\bar{x}] = \sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_p\right] = \frac{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}{\sqrt{n}}. \qquad (4.7)$$

Таким чином, при визначенні результату вимірювання як середнього арифметичного з n результатів вимірювань СКВ похибки результату вимірювання зменшується в $\sqrt{n}$ разів порівняно з генеральним СКВ результатів окремих вимірювань. Ця властивість лежить в основі методу статистичної мінімізації.

При нормальному розподілі результатів вимірювань і відомому генеральному СКВ інтервальні характеристики похибки результату вимірювань визначають як:

$$\Delta_H = -z\frac{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}{\sqrt{n}}; \qquad \Delta_B = z\frac{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}\right]}{\sqrt{n}};$$

де $\Delta_{Í}$ і $\Delta_{Â}$ - нижня і верхня границі інтервалу при $P_{äîâ} = 2Ô(z)$.

Якщо генеральна дисперсія результатів вимірювань невідома, то для її визначення використовується вибіркова дисперсія , незсунену оцінку якої знаходять як:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}V_i^2,$$

де $V_i = x_i - \bar{x}$ - випадкове відхилення.

Випадкові відхилення мають такі важливі властивості:

1. Алгебраїчна сума випадкових відхилень дорівнює нулю.

Дійсно, $$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \cdot n = 0 .$$

Цю властивість часто застосовують для перевірки правильності обчислення випадкових відхилень.

2. Сума квадратів випадкових відхилень мінімальна, тобто $\sum_{i=1}^{n} V_i^2 = \min$.

Сума квадратів мінімальна, якщо задовольняється умова екстремуму, тобто перша похідна від суми по $\bar{x}$ дорівнює нулю:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\partial \bar{x}} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right) = 0 .$$

Таким чином, середнє арифметичне є ефективною оцінкою. Це означає, що коли замість середнього арифметичного взяти інше значення A і визначити суму квадратів випадкових відхилень від нього $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - A\right)^2$, то ця сума, ніж сума квадратів випадкових відхилень від середнього арифметичного, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - A\right)^2 .$$

Слушною і незсуненою оцінкою СКВ результатів багаторазових вимірювань є оцінка:

$$\tilde{\sigma}[x] = M(\nu) \cdot S ,$$

де $$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2} , \qquad (4.8)$$

$M[\nu]$ - поправочний коефіцієнт, що компенсує зсув оцінки S, що залежить від кількості ступенів свободи розподілу Стьюдента $\nu = n-1$.

Значення коефіцієнта, що компенсує зсув оцінки СКВ, наведені в таблиці 3.

Якщо $\nu > 19$, то $M[\nu]$ приймають таким, що дорівнює 1.

Якщо знехтувати поправкою на зсув оцінки S, то оцінка СКВ результатів вимірювань:

$$\widetilde{\sigma}[x] = S .$$

З урахуванням (4.7), (4.8) слушна і незсунена оцінка СКВ результату вимірювання (середнього арифметичного):

$$\widetilde{\sigma}[\bar{x}] = M(\nu) \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S}{\sqrt{n}} M(\nu) . \qquad (4.9)$$

Якщо знехтувати поправкою на зсув оцінки $\widetilde{\sigma}[\bar{x}]$, можна одержати з (4.9)

$$\widetilde{\sigma}[\bar{x}] = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S}{\sqrt{n}} . \qquad (4.10)$$

Якщо результат вимірювання подають за настановами ISO [9], то СКВ випадкової похибки $\widetilde{\sigma}[\bar{x}]$ за формулами (4.9), (4.10) є стандартною невизначеністю з оцінюванням за типом А.

При нормальному розподілі результатів вимірювання і вибірковій оцінці СКВ S Інтервальні характеристики похибки вимірювання визначають таким чином:

$$\Delta_H = -t(P,\nu)\frac{S}{\sqrt{n}}; \qquad \Delta_B = t(P,\nu)\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad (4.11)$$

де $t(P,\nu)$ - квантиль розподілу Стьюдента, що знайдена за довірчою ймовірністю P і числом ступенів свободи $\nu = n - 1$ (табл.2)

Якщо результат вимірювання подають за настановами ISO [9], то модуль довірчих границь (4.11) є розширеною невизначеністю з оцінюванням за типом А.

З отриманих точкових і інтервальних характеристик похибки результату вимірювання очевидно, що випадкова складова похибки результату вимірювання при багаторазових вимірюваннях зменшується при збільшенні кількості вимірювань. Середнє арифметичне (результат вимірювання) є випадковою величиною «в малому», основна частина середнього арифметичного є невипадкова величина, а характеристикою

розсіювання є його СКВ $\tilde{\sigma}[\bar{x}]$ чи дисперсія. При обробці даних багаторазових вимірювань отримують вибіркове СКВ.

І на практиці вирішують задачу визначення довірчих границь (нижньої і верхньої) двохстороннього інтервалу для генеральної дисперсії $\sigma^2[x]$ при відомій вибірковій S^2.

Якщо задана довірча ймовірність P і кількість вимірювань n, тоді згідно [17]:

$$\sigma_H^2 = \frac{\nu \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{1+P}{2}}(\nu)}; \qquad \sigma_B^2 = \frac{\nu \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{1-P}{2}}(\nu)}; \tag{4.12}$$

Де σ_H^2 , σ_B^2 - нижня і верхня границі довірчого інтервалу для генеральної дисперсії відповідно, $\chi^2_{\frac{1+P}{2}}(\nu)$ і $\chi^2_{\frac{1-P}{2}}(\nu)$ - відповідні квантилі розподілу χ^2 з ν ступенями свободи.

Після введення коефіцієнтів:

$$\chi_{\frac{1+P}{2}}(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\chi^2_{\frac{1+P}{2}}(\nu)}}; \qquad \chi_{\frac{1-P}{2}}(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\chi^2_{\frac{1-P}{2}}(\nu)}};$$

формули (4.12) набувають вигляду:

$$\sigma_H^2 = \chi^2_{\frac{1+P}{2}}(\nu) \cdot S^2; \qquad \sigma_B^2 = \chi^2_{\frac{1-P}{2}}(\nu) \cdot S^2. \tag{4.13}$$

Тоді з урахуванням (4.13) довірчі границі для генерального СКВ дорівнюють:

$$\sigma_H = \chi_{\frac{1+P}{2}}(\nu)\cdot S\ ; \qquad \sigma_B = \chi_{\frac{1-P}{2}}(\nu)\cdot S\ .$$

Значення коефіцієнтів $\chi_{\frac{1+P}{2}}(\nu)$, $\chi_{\frac{1-P}{2}}(\nu)$ наведені в таблиці 4.2. для ймовірності $P = 0{,}95$.

Порівняння даних, наведених в таблиці 4 для ймовірності $P = 0{,}95$. Порівняння даних, наведених в таблиці 3, що характеризують зсув оцінки $\tilde{\sigma}[x]$ і в таблиці 4, що характеризують розсіяння оцінки $\tilde{\sigma}[x]$ показує, що розсіяння набагато перевищує зсув при однаковій кількості вимірювань. Тому на практиці для оцінювання СКВ використовують формулу (4.10).

4.4. Способи виявлення систематичних похибок

Систематичну складову похибки вимірювання доцільно зменшувати або компенсувати до рівня випадкової складової похибки. Якщо систематична і випадкова складові похибки сумірні, то першу можна виявити тільки статистичними методами. Методи корекції систематичної похибки в такому випадку засновані на статистичних методах її
виявлення. Наведені нижче критерії нерівності дають можливість виявити систематичну складову похибки, якщо вона перевищує усереднену статистичними методами випадкову складову похибки.

4.4.1. Способи виявлення змінних систематичних похибок

Змінні систематичні похибки можуть бути виявлені в ряді багаторазових вимірювань однієї і тієї ж величини. Способи виявлення змінних похибок розділяють за суттєвістю випадкової складової похибки.

Способи виявлення змінних систематичних похибок при несуттєвій випадковій складовій похибки

Якщо випадкова похибка несуттєва, систематичну похибку можна виявити за чергуванням знаків випадкових відхилень від середнього арифметичного. Нижче наведено правила виявлення змінних систематичних похибок при багаторазових вимірюваннях:

● Якщо знаки невиправлених випадкових відхилень чергуються за певною закономірністю, то має місце змінна систематична похибка.

● Якщо послідовність знаків «+» випадкових відхилень знімається послідовністю знаків «-» і навпаки, то має місце прогресуюча систематична похибка.

● Якщо групи знаків «+» і «-» випадкових відхилень чергуються, то має місце періодична систематична похибка.

Способи виявлення змінних систематичних похибок при суттєвій випадковій похибці

При виявленні змінних систематичних похибок при суттєвій випадковій похибці використовують критерії перевірки незалежності вибіркових значень і стаціонарності вибірки:

- критерій серій, заснований на медіані;
- критерій «висхідних» і «не висхідних» серій;

Критерій серій, заснований на медіані. При використанні критерію серій, заснованого на медіані, ряд результатів вимірювання подають з ранжируванням за зростанням результатів. За вибіркове значення медіани вибирають середній член вибірки, користуючись правилом:

- $\tilde{x}_{med} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, якщо кількість членів ряду n непарна,
- $\tilde{x}_{med} = \frac{1}{2}\left(x_{(n/2)} + n_{(n/2+1)}\right)$, якщо n парна.

Потім повертаються до початкової вибірки (без ранжування), а замість кожного x_i ставлять знак «+», якщо $x_i > \tilde{x}_{med}$ і «-», якщо $x_i < \tilde{x}_{med}$, (члени

вибірки, що дорівнюють $\tilde{x}_{med}$ пропускають). Отримана послідовність плюсів і мінусів характеризується загальним числом серій υ(n) і довжиною самої довгої серії τ(n). Під «серією» розуміють послідовний ряд плюсів або мінусів (найкоротша серія складається з
одного плюса і одного мінуса).

Для рівня значущості 0.05 < α <0.0975, за умов, що хоча одна з нерівностей:

$$\boxed{\begin{aligned} &\upsilon(n) > \left[\frac{1}{2}(n+1) - 1.96\sqrt{n-1}\right], \\ &\tau(n) < [3{,}3\ \lg(n+1)] \end{aligned}}$$

не виконується, гіпотезу про статистичну незалежність випадкових

відхилень (або результатів вимірювань) відкидають і приймають гіпотезу про наявність систематичної складової похибки.

Критерій «висхідних» і «не висхідних» серій. Критерій «висхідних» і «не східних» серій чуттєвий до прогресуючих і періодичних
систематичних похибок. За основу також беруть послідовність знаків «+» і «-», але правило отримання цієї послідовності інше. Якщо послідовність має вигляд: $x_1, x_2, ..., x_n$, то на *i*-тому місці ставлять «+», якщо $x'_{i+1} - x_i \succ 0$, і «-», якщо $x_{i+1} - x_i \prec 0$ (якщо $x_i = x_{i+1}$, то приймають до уваги тільки одне з них). Для рівня значущості 0.05 < α <0.0975 цей критерій має вид:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nu(n) > \left[\frac{1}{3}(2n+1) - 1{,}96 \cdot \sqrt{(16n-29)/90}\right], \\ &\tau(n) < \tau_0(n), \end{aligned}}$$

де $\tau_0(n)$, в залежності від n дорівнює:

$$\begin{aligned} &n \le 26;\ \tau_0(n) = 5; \\ &26 < n \le 153;\ \tau_0(n) = 6; \\ &153 < n \le 1170;\ \tau_0(n) = 7. \end{aligned}$$

Якщо хоча б одна з нерівностей не виконується, то гіпотезу про статистичну незалежність випадкових відхилень або результатів вимірювань відкидають і приймають гіпотезу про наявність систематичної складової похибки.

Для виявлення прогресуючих систематичних похибок в нормально розподіленій сукупності використовують критерій Аббе [22].

Постійно зростаючу чи спадаючу систематичну похибку можливо виявити по одній групі результатів вимірювань, якщо виконується нерівність

$$\frac{S_d^2}{S^2} \prec \nu_T\left(q,n\right),$$

де S_d - середнє квадратичне відхилення групи результатів вимірювань, обчислене за формулою $S_d = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i}^{n-2}\left(x_{i+1} - x_i\right)^2}$, S - середнє квадратичне відхилення групи результатів вимірювань. обчислене за формулою $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$, n - кількість вимірювань в групі; x_i - і-ий результат вимірювання групи; $\nu_T\left(q,n\right)$ - квантиль розподілу, що відповідає рівню значущості q і кількості вимірювань n в групі.

Значення $\nu_T\left(q,n\right)$ в залежності від рівня значущості q і числа вимірювань «n» наведено в таблиці 5,6.

4.4.2. Способи виявлення постійних систематичних похибок

При несуттєвій випадковій складовій похибки постійна систематична похибка може бути виявлена при одноразовому вимірюванні за допомогою засобу вимірювання (ЗВ) більш високого рівня точності. При суттєвій випадковій складовій похибки постійна систематична похибка може бути виявлена при багаторазових вимірюваннях однієї і тієї величини , виконаних ЗВ з систематичною похибкою і зразковим ЗВ.

Якщо кожний результат вимірювання x_i вміщує систематичну і випадкову складові похибки, тобто:

$$x_i = x_{icm} + \Delta_s + \overset{0}{\Delta}_i,$$

то середнє арифметичне ряду з n вимірювань вміщує систематичну і усереднену випадкову складові похибки

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_1 = x_{icm} + \Delta_s + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{0}{\Delta}_i .$$

Випадкові похибки в складі $\bar{x}$ мають різні знаки і тому їх середнє значення наближається до нуля при великій кількості вимірювань, а систематична складова похибки залишається незмінною. Тому $\bar{x}$ називаються невиправленим середнім значенням. Для його виправлення треба виявити систематичну похибку і ввести корегувальну поправку.

Якщо систематична похибка постійна, то випадкові відхилення

окремих результатів вимірювання U_i від середнього арифметичного від неї не залежать, тобто

$$U_i = x_i - \bar{x} = \overset{0}{\Delta}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{0}{\Delta}_i ,$$

тому невиправлені випадкові відхилення можуть бути безпосередньо використано для оцінювання розсіювання ряду вимірювань. Але по одному невиправленому ряду вимірювань неможливо виявити постійну систематичну складову похибки. Тому другий ряд вимірювань отримують або за допомогою зразкового ЗВ або за допомогою ЗВ, в якому систематична складова похибка практично відсутня. Якщо відомо, що

результати двох груп розподілені нормально, відомі середні значення $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$, генеральні СКВ $\sigma[x_1]$ і $\sigma[x_2]$, то для виявлення систематичної складової похибки використовується критерій Лапласа [22]:

$$Z' = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\sigma^2[\bar{x}_1] + \sigma^2[\bar{x}_2]}} \qquad (4.14)$$

де $\sigma[\bar{x}_1] = \dfrac{\sigma[x_1]}{\sqrt{n_1}}, \sigma[\bar{x}_2] = \dfrac{\sigma[x_2]}{\sqrt{n_2}}$; n_1, n_2 – кількість вимірювань в двох рядах

відповідно.

Для перевірки гіпотези про відсутність систематичної похибки задають рівень значущості α і визначають квантиль нормального розподілу $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ табл.1, що відповідає заданій довірчій ймовірності $P_{дов} = 1-\alpha$.

Якщо $Z' > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, то гіпотезу про відсутність систематичної похибки відкидають з рівнем значущості α.

Приклад. Задані рівень значущості $\alpha = 0{,}05$ та довірча ймовірність $P_{дов} = 0{,}95$. Тоді $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$. Таким чином можна стверджувати, що при $Z' > 1{,}96$ має місце систематична похибка.

При наявності двох груп вимірювань однієї, які мають нормальний розподіл з однорідними $\left(S_1^2 \approx S_2^2\right)$ СКВ (генеральні СКВ невідомі), для виявлення систематичної похибки використовують критерій Стьюдента [22]. Систематична похибка присутня в одній з груп чи вони різні в

групах, якщо виконується нерівність:

$$\frac{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right|}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 \left(n_1 + n_2 - 2\right)}{n_1 + n_2}} \succ t'\left(q, f\right),$$

де $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ - середнє арифметичне значення, відповідно, першої і другої

груп; S_1, S_2 - СКВ першої і другої груп, відповідно; n_1, n_2 - число вимірювань в групах; $t\left(q, f\right)$ - квантиль розподілу Стьюдента в залежності від рівня значущості q і сила ступенів свободи $f = n_1 + n_2 - 2$ (табл.2).

Якщо $t' > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, де $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль розподілу Стьюдента, що знайдена за

рівнем значущості $\alpha = 1 - P_{дов}$ і числу ступенів свободи розподілу Стьюдента $n_1 + n_2 - 2$, тоді гіпотезу про відсутність систематичної похибки відкидають з рівнем значущості α.

Однорідність СКВ в двох групах – допустима відмінність S_1 і S_2, якщо виконується нерівність:

$$\frac{1}{F_{q/2}} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} \le F_{q/2} \, ,$$

де $F_{q/2}$ - квантиль розподілу Фішера в залежності від числа ступенів свободи $f_1 = n_1 - 1$ та $f_2 = n_2 - 2$. Квантилі розподілу Фішера для рівня значущості наведені в табл.6.

Якщо СКВ двох груп вимірювань не належать до однієї генеральної сукупності (не однорідні), то використовують нерівність:

$$\frac{\left| \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \right|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \succ t(q, f),$$

де число ступенів свободи є найбільшим цілим число, яке не перевищує

$$f = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)\left(S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2\right)^2}{(n_2 - 1)\left(S_1^2 / n_1\right)^2 + (n_1 - 1)\left(S_2^2 / n_2\right)^2}.$$

Квантилі розподілу Стьюдента в залежності від рівня значущості q і числа ступенів свободи f наведено в табл. 2.

РОЗДІЛ 5. ВИКОРИСТАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У РАЗІ ПОДАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ ВИМІРЮВАННЯ

Подаючи результат вимірювання фізичної величини, необхідно кількісно оцінити його якість. Без такої оцінки результати вимірювань неправомірно порівнювати. У настановах ISO [9] оцінкою якості результату вважають його невизначеність.

Концепція невизначеності як якісного атрибута результату вимірювання відносно нова в історії вимірювання, хоча поняття похибки й аналіз похибок є основними поняттями метрології. Доведено, що навіть коли всі відомі і припущені складові похибки оцінено і проведено необхідні корекції, установлений результат усе ще залишається невизначеним, тобто є сумнів у тому, наскільки точно результат вимірювання відображає реальне значення вимірюваної величини.

Так прийняття Міжнародної системи одиниць (SI) сприяло єдності наукових і технічних вимірювань, так і угода про оцінку й подання невизначеності результату вимірювання, прийнята більшістю розвинених країн, дозволила б однаково розуміти широкий спектр результатів вимірювання в науці, інженерії, комерції, індустрії [9]. В умовах нинішньої глобалізації ринку метод оцінювання і подання невизначеності має бути єдиним у всьому світі, що дозволить порівнювати результати вимірювань, які проводять у різних країнах.

5.1. Оцінка невизначеності й подання результату вимірювання згідно з керівним документом ISO

Термін ***невизначеність*** означає сумнів, він розширює смисл ***невизначеності вимірювання*** в бік сумніву відносно результату вимірювання.

Терміни ***істинне значення вимірюваної величини*** **і** ***похибка результату вимірювання*** не використовують у формуванні родової групи понять, пов'язаної з результатом вимірювання. Використовують поняття ***оцінене значення вимірюваної величини*** **і** ***невизначеність. Невизначеність,*** за ДСТУ 2681-94 [5],[16] - це оцінка, що характеризує діапазон значень, у якому є істинне значення вимірюваної величини. У керівному документі ISO наведено таке визначення: невизначеність вимірювання - параметр, об'єднаний з результатом вимірювання, що характеризує розсіювання значень вимірюваної величини.

Такий підхід використовували в зарубіжній літературі вже давно. Наприклад, у книзі Дж. Тейлора [23], назва якої в оригіналі «An introduction to error analysis. The study of Uncertainties in Physical Measurements», наведено формування результату вимірювань часу:

Найкраща оцінка часу – 2,4 с;
Ймовірний інтервал – 2,3…2,5 с. (5.1)

У цьому випадку найкраща оцінка 2,4 с знаходиться посередині інтервалу ймовірних значень. Таке положення дуже зручне і дозволяє виразити результат вимірювання в найкомпактнішому вигляді:

виміряне значення часу — (2,4 ± 0,1) с.

Вираз еквівалентний (5.1), у цьому випадку 2,4 с - найкраща оцінка вимірюваної величини, а 0,1с - невизначеність результату вимірювання. Тут не використовано поняття істинного значення вимірюваної величини, а термін *невизначеність* виражає сумнів відносно отриманого значення вимірюваної величини.

Невизначеність характеризує розсіювання значень вимірюваної величини. Параметром розсіювання є середнє квадратичне відхилення чи половина ширини інтервалу розсіювання з установленим рівнем довіри. Це видно з наведеного вище прикладу

невизначеність - (2,5 - 2,3)/2 = 0,1 с.

Рівень довіри в цьому випадку дорівнює одиниці.

Невизначеність результату вимірювання (НВ) включає багато компонентів. Деякі з них можна охарактеризувати СКВ, отриманим на основі статичного розподілу результату вимірювань. Решту компонентів можна також охарактеризувати СКВ, але отриманим на основі взятого від себе розподілу ймовірностей чи за допомогою іншої інформації.

Очевидно, що результат вимірювання є найкращою оцінкою значення вимірювальної величини і всі складові невизначеності, що виникають у результаті систематичних ефектів, вилучено, наприклад, за допомогою корекції, введення поправки і використання еталонів; не вилучені залишки входять до розсіювання результатів вимірювання, тобто до невизначеності.

5.1.1. Терміни, введені настановами ISO

Стандартна невизначеність (standard uncertainty) - невизначеність результату вимірювання, виражена як СКВ.

Оцінювання невизначеності вимірювання типу А – метод оцінювання складових невизначеності вимірювання, що заснований на статистичному аналізі значень величин, отриманих при повторних вимірювань.

Оцінювання невизначеності вимірювання типу В - метод оцінювання складових невизначеності вимірювання з використанням іншої інформації, ніж тієї, що отримана за статистичним аналізом значень вимірюваної величини.

Комбінована (сумарна) стандартна невизначеність (combined standard uncertainty) - стандартна невизначеність результату вимірювання, отримана із значень ряду інших величин, що дорівнює додатному корню із суми квадратів складових, які є дисперсіями та/або коваріаціями значень інших величин і зважені і відповідності з їх впливом на результат вимірювання.

Розширена невизначеність (expanded uncertainty) - НВ, що визначається половиною ширини симетричного покривного інтервалу з центром, що є оцінкою величини, який відповідає певній покривній ймовірності.

Фактор покриття (coverage factor) - числовий коефіцієнт, що використовують як множник, щоб отримати розширену невизначеність зі стандартної невизначеності чи з комбінованої стандартної невизначеності.

5.1.2. Невизначеність, її джерела та складові

Вимірювання недосконале, це спричинює похибку в результаті вимірювання. Традиційно похибка має дві складові: систематичну і випадкову. Припускають, що результат вимірювання можна скоригувати для розпізнаних систематичних ефектів. Прикладом може бути корекція похибки від скінченності опору вольтметра під час вимірювання різниці потенціалів. Якщо для калібровки використовують еталонні засоби, то їх похибка входить до невизначеності.

Невизначеність результату вимірювання відбиває недоліки неточного знання значення вимірюваної величини.

Результат вимірювання після корекції різних систематичних ефектів залишається тільки оцінкою вимірюваної величини з невизначеністю, що виникає від випадкових ефектів під час вимірювання і через недосконалість корекції систематичної похибки.

Примітка. Якщо під час корекції невизначеність зростає, то результат залишають не скоригованим.

Є багато джерел невизначеності вимірювання, а саме:

- недосконалість визначення вимірюваної величини;

- недосконалість реалізації визначення вимірюваної величини (недосконалість методу вимірювання);
- нерепрезентативна вибірка;
- недостатня інформація про вплив параметрів навколишнього середовища на вимірювання чи недосконалість вимірювання в певних умовах навколишнього середовища;
- особисті неточності у відліку аналогових приладів;
- обмежена розрізнювальна здатність;
- неточні значення еталонів і стандартних зразків;
- неточні значення констант й інших параметрів, отриманих від зовнішніх джерел, які використовують в алгоритмах;
- апроксимація і неточності в методі і процедурі вимірювання;
- зміни повторюваних вимірювань за незмінних умов.

Ці джерела невизначеності не обов'язково мають бути незалежними. Методи оцінювання невизначеності вимірювання розподілено на типи оцінювання типу А і оцінювання типу В. Метою цього розподілу необхідність показати два різні способи оцінки компонентів невизначеності, а не вказати на різну природу компонентів.

Обидва типи оцінки основані на розподілі ймовірностей, і компоненти невизначеності обох типів оцінюють дисперсією чи СКВ.

Оцінкою дисперсії u^2 характеризуються компоненти, отримані оцінюванням типу *А;* її визначають за рядом багаторазових вимірювань і статичною обробкою їх результатів. Оцінку СКВ $u = S$ називають стандартною невизначеністю з оцінюванням типу *А.* Для компонентів невизначеності отриманих оцінюванням типу *В,* невизначеність, подібну дисперсії u^2, оцінюють, використовуючи відповідні знання.

Стандартну невизначеність результату вимірювання у випадку, коли результат отримують із значень ряду інших величин, називають комбінованою стандартною невизначеністю, і позначають u_{c}..

Розширену невизначеність U отримують помноженням стандартної невизначеності (комбінованої стандартної невизначеності) на фактор покриття K.

Мета введення U - забезпечити такий інтервал біля результату вимірювання, у який потрапляє більша частина розподілу вимірюваної величини. Вибір фактора покриття K, що зазвичай знаходиться в інтервалі від 2 до 3, основано на виборі довірчої ймовірності, чи рівня довіри.

5.1.3 Модель вимірювання

У багатьох випадках вимірювану величину Y не вимірюють прямо, а визначають з N інших величин x_1, x_2, x_N за функційною залежністю f:

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \tag{5.2}$$

Вхідні величини $x_1, x_2, \ldots, x_N$, від яких залежить вихідна величина Y, можна розглядати як вимірювані. Вони можуть залежати від інших величин, що включають поправки для систематичних ефектів, які, у свою чергу, ускладнюють функційну залежність f. У таких випадках f можна визначити експериментально, вона може існувати як алгоритм, який оцінюють тільки чисельно.

Якщо з даних видно, що f не є моделлю вимірювання з тим ступенем точності, якого потребують від результату вимірювання, необхідно ввести додаткові величини, щоб зменшити неадекватність моделі вимірювання.

Ряд вхідних величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$ можна характеризувати так:

- Величини, значення і невизначеності яких безпосередньо отримано в поточному вимірюванні. Ці значення і невизначеності можна отримати, наприклад, у результаті одноразового вимірювання або припущень, основаних на досвіді; вони можуть включати корекцію відліків приладів і корекцію дії впливових величин (температури, тиску тощо);

- Величини, значення і невизначеності яких отримано від зовнішніх джерел, наприклад, за допомогою калібрувальних еталонів, сертифікованих стандартних зразків чи з технічної літератури.

Оцінку вимірюваної величини *Y*, позначену *y,* яка є результатом вимірювання, отримують з рівняння (5.2), використовуючи вхідні оцінки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ для *N* значень величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Примітка. У деяких випадках оцінку можна отримати так:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{Nk}), \tag{5.3}$$

тобто *y* отримують як середнє арифметичне значення *n* незалежних змінних $y_к$ з *y*. Цей спосіб усереднення відрізняється від усереднення за *x*:

$$\overline{Y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N), \tag{5.4}$$

де $\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}$.

Усередненню (5.3) можна віддати перевагу, коли *f* - нелінійна функція вхідних величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Обидва підходи рівноцінні, якщо *f* є лінійною функцією X_i.

Оцінку СКВ для результату вимірювання *y* названо в керівному документі ISO комбінованою стандартною невизначеністю з позначенням $u_c(y)$; її визначають з оцінок СКВ для кожного x_i, які називають стандартними невизначеностями і позначають $u(x_i)$.

Кожну вхідну оцінку x_i та її стандартну невизначеність $u(x_i)$ отримують з розподілу можливих значень вхідної величини x_i.

Розподіл імовірності може бути оснований на ряді вимірювань x_{ik} величини X_i чи може бути апріорним розподілом. Оцінки типу *A* компонентів стандартної невизначеності основані на апостеріорних даних, у той час як оцінки типу *B* основані на апріорних даних.

5.1.3. Оцінювання стандартної невизначеності за типом А

Найкращою оцінкою випадкових змін величини X_i для n незалежних вимірювань є середнє арифметичне значення:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \ , \qquad (5.5)$$

яке використовують в рівнянні (5.4), що визначає результат вимірювання $\overline{Y}$.

Експериментальну дисперсію вимірювань величини X_i, що є оцінкою дисперсії розподілу**,** обчислюють так:

$$S^2(x_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \ .$$

Оцінка дисперсії і додатний квадратний корінь з неї $S(x_i)$, який називають ***експериментальним СКВ***, характеризують змінність вимірюваних величин коло їх середнього значення. Найкращу оцінку дисперсії середнього наведеного нижче:

$$S^2(\bar{x}_i) = \frac{S^2(x_i)^2}{n} \ . \qquad (5.6)$$

Експериментальна дисперсія середнього $S^2(\bar{x}_i)$ і експериментальне СКВ середнього $S(\bar{x}_i)$ кількісно характеризують, наскільки повно середньоарифметичне $\bar{x}_i$ відповідає математичному сподіванню m_X, і можуть бути мірою невизначеності $\bar{x}_i$.

Параметри:

- $u^2(x_i) = S^2(\bar{x}_i)$ називають ***дисперсією за типом оцінювання*** **А;**
- $u(x_i) = S(\bar{x}_i)$ називають ***невизначеністю за типом оцінювання*** **А.**

Отже, для вхідної величини X_i, визначеної з незалежних багаторазових вимірювань x_{ik}, за оцінку значення величини приймається середнє арифметичне значення

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik},$$

а стандартна невизначеність оцінки обчислюється за формулою

$$u(x_i) = S(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_i)^2}.$$

Примітка. Кількість вимірювань n має бути настільки великою, щоб гарантувати, що середнє $\bar{x}_i$ забезпечує надійну оцінку математичного сподівання і що $u^2(x_i) = S^2(\bar{x}_i)$ забезпечує надійну оцінку дисперсії.

Ступені свободи υ_i стандартної невизначеності $u(x_i)$ обчислюють з n незалежних вимірювань.

Якщо випадкові зміни вхідної величини корельовані, наприклад, з часом, середнє й експериментальне СКВ визначають відповідним чином з урахуванням кореляції.

5.1.4. Оцінювання стандартної невизначеності за типом В

Для оцінок x_i вхідної величини X_i, не отриманих у результаті багаторазових вимірювань, об'єднану оцінку дисперсії $u^2(x_i)$ чи стандартну невизначеність $u(x_i)$ оцінюють на основі інформації про можливі зміни x_i. Інформація може включати:

- дані попереднього вимірювання;
- знання, основані на досвіді, або загальні знання про поведінку і властивості матеріалів та пристроїв;
- документи виробника;
- дані калібрування і сертифікації;
- приписані даним невизначеності, отримані з книжок.

Для зручності $u^2(x_i)$ й $u(x_i)$, отримані таким чином, називають ***дисперсією* з оцінюванням за типом *В* і *СКВ за типом оцінюванням В*** відповідно.

Примітка. Якщо величину q розподілено нормально, то відношення СКВ оцінки $S(\overline{q})$ до $\sigma(\overline{q})$ дорівнює: $\sigma[S(\overline{q})]/\sigma(\overline{q}) \approx [2(n-1)]^{-1/2}$.

Отже, поклавши $\sigma[S(\overline{q})]$ як невизначеність $S(\overline{q})$ для кількості вимірювань $n=10$, можна отримати значення відносної невизначеності $S(\overline{q})$, що дорівнює 24%, для n = 50 відносна невизначеність буде 10 %.

Приклад. Калібрувальний сертифікат установлює, що маса еталонів m_s з номінальним значенням в 1 кг насправді дорівнює 1000,000325 г і що «невизначеність, яка дорівнює 240 мкг, встановлено на рівні трьох СКВ». Тоді $u(m_s) = (240\ \text{мкг})/3 = 80\text{мкг}$, відносна стандартна невизначеність становить $u(m_s)/m_s = 80 \cdot 10^{-9}$.

Невизначеність x_i необов'язково виражати як СКВ. Це може бути довірчий інтервал з рівнем довіри 90; 95; 99%. Для нормального розподілу множники СКВ тоді 1,64; 1,96; 2,58 відповідно.

Розглянемо випадок, оснований на використанні попередньої інформації: «із шансом п'ятдесят на п'ятдесят вхідна величина x_i лежить в інтервалі від a_- до a_+». Якщо припустити, що розподіл приблизно нормальний, то найкраща оцінка x_i, для x - середина інтервалу. Якщо половина інтервалу $a=|a_- - a_+|/2$, тоді $u(x_i)=1.48a$, тому що для нормального розподілу 50%-ий інтервал $\mu \pm \sigma/1{,}48$.

В інших випадках границі (верхню і нижню) для X_i можна оцінити для «ймовірності, що значення X_i лежить в інтервалі від a_- до a_+, яка дорівнює одиниці». Якщо немає інформації про розподіл, використовують характеристики рівномірного (прямокутного) розподілу. Тоді об'єднана дисперсія для середньої точки інтервалу $x_i = (a_- + a_+)/2$

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_=)^2 / 12 .$$

Якщо різниця між границями $a_+ - a_-$ відповідає *2a,* то

$$u^2(x_i) = a^2 / 3.$$

Границі (верхня і нижня) можуть бути несиметричними: $a_- = x_i - b_-$, $a_+ = x_i + b_+$, причому $b_- \neq b_+$. Тоді x_i не є центром интервалу.

У цьому випадку в x_i можна ввести поправку. Якщо немає інформації про несиметрію границь, оцінка дисперсії

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ - b_-)}{12} = \frac{(a_+ - a_-)}{12}.$$

Приписування рівномірного розподілу не завжди виправдане. Біля границь інтервалу ймовірність завжди менша. Тому у випадку, коли ймовірність дорівнює одиниці, можна приписувати трикутний розподіл чи трапецієподібний, рис. 5.1.

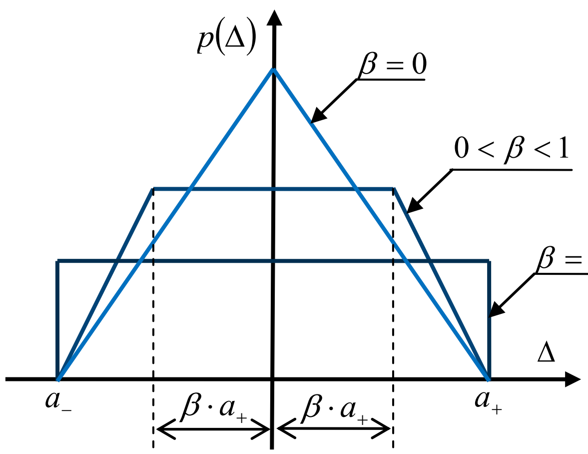


Рисунок 5.1 ─ Трапецієподібний розподіл похибок

Нехай $a_+ - a_- = 2a$. Верхня сторона трапеції дорівнює $2a\beta$, де $0 \le \beta \le 1$. Якщо $\beta = 1$, трапецієподібний розподіл переходить у прямокутний, якщо $\beta = 0$ - у трикутний. Якщо розподіл трапецієподібний, то

$$x_i = (a_- + a_+)/2$$

і дисперсія дорівнює

$$u^2(x_i) = a^2(1+\beta^2)/6 .$$

Для трикутного розподілу дисперсія

$$u^2(x_i) = a^2/6 .$$

5.1.5. Оцінювання комбінованої стандартної невизначеності

Якщо вхідні величини некорельовані, то комбінована стандартна невизначеність $u_c(y)$ дорівнює додатному квадратному корню з комбінованої дисперсії $u_c^{\,2}(y)$:

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) , \qquad (5.7)$$

де f - функція, наведена в (5.2); $u(x_i)$ - стандартна невизначеність для кожного компонента (тип *A* чи *B*, залежно від методу оцінки).

Примітка. Якщо нелінійність f значна, до формули (5.7) включають члени розкладання за рядом Тейлора вищого порядку. Коли розподіл кожного X_i симетричний відносно свого середнього, додають найважливіші члени наступного, вищого порядку:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right]u^2(x_i)u^2(x_j)$$

Частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ дорівнюють $\dfrac{\partial f}{\partial X_i}$, оціненим, якщо $X_i = x_i$. Ці похідні часто називають коефіцієнтами чутливості, що вказують, як вхідні оцінки $x_1, x_2, ..., x_N$ впливають на змінну *y*. Якщо зміни x_1 малі, то зміни *y*

$$(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)\Delta x_i$$

можна оцінити як $(\Delta y)_i = (\Delta f / \Delta x_i)\Delta x_i$.

Якщо комбінована дисперсія визначається декількома величинами, то

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[c_i u(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2}(y),\, , \tag{5.8}$$

де $\quad c = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \;\; u_i(y) \equiv c_i u(x_i).$ (5.9)

Примітка. Якщо підходити строго, частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ оцінюють за математичним сподіванням величин X_i. Але на практиці похідні оцінюють як

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}.$$

Комбіновану стандартну невизначеність можна вирахувати чисельно, використовуючи заміну $c_i u(x_i)$ у рівнянні (5.8):

$$Z_i = \frac{1}{2}\left[f(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N)\right],$$

тобто $u_1(y)$ оцінюють чисельно з урахуванням зміни x_1 від $+u(x_i)$ до $-u(x_i)$. Значення $u_i(y)$ можна взяти як $|Z_i|$, а значення, що відповідає коефіцієнтові чутливості c_i як $Z_i / u(x_i)$.

Коефіцієнти чутливості $\partial f / \partial x_i$ можна визначити експериментально. У цьому випадку функцію f замінюють рівнянням Тейлора першого порядку. Якщо

$$Y = c_i x_2^{\,p_1} x_2^{\,p_2}, \ldots, x_N^{\,p_N},$$

де p – степені (додатні і від'ємні), невизначеностями яких можна знехтувати, то комбіновану дисперсію виражають так:

$$\left[u_c(y)/y\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i u(x_i)/x_i\right]^2. \tag{5.10}$$

У формулі (5.10) використовують оцінку відносної дисперсії $\left[u(x_i)/x_i\right]^2$.

Якщо вхідні величини корельовані, відповідний вираз для комбінованої дисперсії $u_c^2(y)$ результату вимірювання набирає такого вигляду:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j), \tag{5.11}$$

де x_i та x_j - оцінки X_i і X_j; $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ - оцінка коваріації для x_i і x_j. Мірою зв'язку між x_i і x_j є оцінка коефіцієнта кореляції

$$r(x_i,x_j) = \frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)}, \tag{5.12}$$

де $$r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i),\ -1 \le r(x_i,x_j) \le +1$$

Якщо оцінки x_i і x_j незалежні, то $r(x_i,x_j) = 0$.

Вираз (5.11) з урахуванням коефіцієнта кореляції набуває вигляду

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j), \tag{5.13}$$

Формулу (5.12) з урахуванням (5.9) перепишемо так:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j).$$

Примітка: Якщо всі коефіцієнти кореляції $r(x_i,x_j) = 1$ то формула (5.13) набуває вигляду

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^{N}c_iu^2(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2.$$

Тоді комбінована стандартна невизначеність - просто додатний корінь з $u_c^{\,2}(y)$. Розглянемо два арифметичні середні $\bar{q}$ і $\bar{r}$, які є оцінками математичних сподівань m_q і m_r, що є характеристиками двох випадкових величин q і r. Оцінка коваріації арифметичних середніх $\bar{q}$ і $\bar{r}$

$$S=(\bar{q},\bar{r})=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k-\bar{q})(r_k-\bar{q})$$

Отже оцінка коваріації двох корельованих вхідних величин X_i і X_j з середніми $\bar{X}_i$ і $\bar{X}_j$ визначається незалежними парами багаторазових вимірювань $u(x_i,x_j)=S(\bar{X}_i,\bar{X}_j)$. Оцінку коефіцієнта кореляції величин $\overline{X_i}$ і $\overline{X_j}$ отримують із виразу (5.12):

$$r(x_i,x_j)=r(\bar{X}_i,\bar{X}_j)=S(\bar{X}_i,\bar{X}_j)/S(\bar{X}_i)S(\bar{X}_j).$$

5.1.6. Оцінювання розширеної невизначеності

Для залежності (5.2) розширену невизначеність отримують множенням комбінованої стандартної невизначеності $u_c(y)$ на покривний фактор (коефіцієнт охоплення)покриття К:

$$U=Ku_c(y)$$

Результат вимірювання виражають як $Y=y\pm U$. Його розуміють так: найкраща оцінка значення вимірюваної величини Y - це y; від $y-U$ до $y+U$ - інтервал, у якому знаходиться більша частина розподілу значень, які представляють Y. Такий інтервал виражають також

$$y-U\le Y\le y+U.$$

Терміни *довірчий інтервал* (confidence interval) чи *довірча ймовірність* (confidence level) - специфічні визначення статистики, їх використовують тільки тоді, коли і розширена невизначеність, і компоненти $u_c(y)$ отримано оцінюванням типу А. Отже, у загальному випадку слово *довірчий* не стосується інтервалу. Імовірність Р у цьому випадку - це ймовірність покриття чи рівень довіри (confidence level) до інтервалу.

Значення покривного фактора покриття вибирають на підставі вимог до рівня довіри для інтервалу від $y-U$ до $y+U$. Переважно покривний фактор покриття вибирають в границях від 2 до 3. Але іноді він може виходити за ці границі.

В ідеалі треба вибирати покривний фактор, що забезпечував би інтервал $Y = y \pm U = y \pm Ku_c(y)$ який відповідає рівню довіри Р 95 чи 99%. Орієнтовні рекомендації для значення К: К=2 для 95% і К=3 для 99%.

5.1.7. Подання невизначеності

Нижче наведено чотири варіанти подання результату вимірювання з комбінованою стандартною невизначеністю:

- $m_s = 100{,}02147$ г, (з комбінованою стандартною невизначеністю) $u_c = 0{,}35$ мг;
- $m_s = 100{,}02147$ (35) г, де число в дужках - числове значення комбінованої стандартної невизначеності u_c, віднесене до відповідних останніх розрядів результату;
- $m_s = 100{,}02147$ (0,00035) г, де число в дужках - числове значення комбінованої стандартної невизначеності u_c, виражене в одиницях результату;
- $m_s = (100{,}02147 \pm 0{,}00079)$ г, де число після символу «±» - це числове значення розширеної невизначеності.

Примітка. Треба уникати форми «±» для стандартної невизначеності, бо цю форму традиційно використовують для інтервалу, тобто для розширеної невизначеності. Теоретично це відповідає К=1, але в цьому разі потрібний рівень довіри Р.

Для подання результату вимірювання з розширеною невизначеністю $U = Ku_c(y)$ необхідно вказувати К і рівень довіри:

$$m_s = (100{,}02147 \pm 0{,}00079) \text{ г},$$

де число після символу «±» - це числове значення розширеної невизначеності $U = Ku_c$ з U, визначеним за комбінованою стандартною невизначеністю $u = 0{,}35$ мг і покривним фактором К=2,26 (згідно з t-розподілом для v=9 ступенів свободи і рівня довіри 95%). Якщо треба, до результату додають коваріаційну матрицю.

Виконуючи обчислення, в числових значеннях треба добавляти додаткові розряди, щоб уникнути накопичення похибки заокруглення.

У детальному звіті, що вказує, як отримано результат вимірювання і його невизначеність, зазначають:

- значення кожної вхідної оцінки x_i та її стандартну невизначеність разом з описом методу , за яким їх отримано;
- оцінки коваріації чи оцінки коефіцієнта кореляції та методи їх оцінювання;
- кількість ступенів свободи для стандартної невизначеності кожної вхідної оцінки й методи їх оцінювання;
- функціональну залежність $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ і, якщо потрібно, частинні похідні чи коефіцієнти чутливості $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Послідовність процедури оцінювання і подання результату наведено нижче. Щоб отримати результат вимірювання Y з невизначеністю, необхідно зробити таке.

1. Виразити математичну залежність між вимірюваною величино Y і вхідними величинами X_i, від яких залежить $Y : Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. Функція f має вміщувати всі величини, включаючи всі корекції і фактори корекції, що можуть зробити внесок у невизначеність результату вимірювання.

2. Визначити x_i , оцінку значення вхідної величини X_i , або за допомогою статистичного аналізу ряду вимірювань, або іншими способами.

3. Оцінити стандартну невизначеність $u(x_i)$ для кожного x_i .

4. Оцінити коваріації для оцінок вихідних величин, якщо вони корельовані.

5. Обчислити результат вимірювання Y .

6. Визначити комбіновану стандартну невизначеність $u_c(y)$.

7. Якщо необхідно, указати розширену невизначеність U , помножуючи комбіновану стандартну невизначеність $u_c(y)$ на покривний фактор К, щоб отримати $U = Ku_c(y)$.

8. Подати результат вимірювання з комбінованою невизначеністю $u_c(y)$ або з розширеною невизначеністю U .

5.2 Упровадження невизначеності і подання результату вимірювання

Серед питань, що виникають під час упровадження установ ISO, можна зазначити такі:

- збіжність і відмінність вітчизняних документів та настанов ISO;
- недоліки та позитивні моменти настанов;
- розробка методик обробки результатів вимірювань, що відповідають настановам і враховують позитивний досвід вітчизняних документів [16].

У цьому розділі розглянуто загальні аспекти подання результату з використанням невизначеності.

5.2.1 Форми подання невизначеності результату вимірювання

Згідно з настановами ISO, подаючи результат вимірювання, використовують такі форми невизначеності: стандартну невизначеність, комбіновану стандартну невизначеність, розширену невизначеність (рис. 5.2).

Рисунок 5.2 ─ Форми подання невизначеності результату вимірювання.

Стандартна невизначеність (standard uncertainly) - це невизначеність результату вимірювання, виражена у вигляді СКВ. Її позначення в настановах ISO - u.

Комбінована стандартна невизначеність (combined standard uncertainty) - стандартна невизначеність результату вимірювання, яку використовують, коли результат вимірювання отримано під час вимірювання інших величин. Вона дорівнює додатному кореню із суми складових (дисперсій чи коваріацій вимірюваних величин), зважених відповідно до впливу вимірюваних величин на результат вимірювання.

Треба зазначити, що в російських публікаціях, присвячених упровадженню невизначеності, цю форму невизначеності названо «суммарной неопределенностью». На захист уведеної нами назви *комбінована стандартна невизначеність* можна навести такі аргументи.

Стандартна невизначеність (перша форма) може також бути сумарною в разі прямого вимірювання з декількома джерелами похибок.

Термін *комбінована стандартна невизначеність* стосується опосередкованого вимірювання, коли складові невизначеності мають певні вагові коефіцієнти.

Тобто в нашому розумінні *стандартна невизначеність* - невизначеність прямого вимірювання (незалежно від кількості складових), а *комбінована стандартна невизначеність* - невизначеність опосередкованого вимірювання.

Якщо прийняти терміни *стандартна невизначеність* і *сумарна невизначеність*, то перший термін відповідає вимірюванню з одним джерелом похибки, а другий - вимірюванню з декількома джерелами похибки.

Але сподіваємося, що остаточно ці термінологічні питання буде вирішено, коли у вітчизняну метрологічну практику буде впроваджено настанови ISO.

Позначення комбінованої стандартної невизначеності в керівному документі ISO - u_c.

Розширена невизначеність (expanded uncertainty) - невизначеність у вигляді інтервалу біля результату вимірювання, у який потрапляє більша частина розподілу значень вимірюваної величини.

Розширену невизначеність U обчислюють за формулами

$$\left.\begin{aligned} U &= Ku, \\ U &= Ku_c \end{aligned}\right\},$$

використовуючи стандартну невизначеність u чи комбіновану стандартну невизначеність u_c і покривний фактор (коефіцієнт) К (coverage factor).

У російських публікаціях для К вживано термін «коэффициент охвата». Тому використовують його переклад – «коефіцієнт охоплення». Невизначеність результату вимірювання зазвичай складається з декількох компонентів, які можна згрупувати в дві категорії відповідно до способу їх оцінювання (рис. 5.3):

- компоненти з оцінюванням типу А - ті, що оцінюють статистичними методами;

- компоненти з оцінюванням типу В - ті, що оцінюють іншим способом (за допомогою правил оцінки «зверху», апріорної інформації, експертних знань тощо).

У зв'язку з цим кожна методика оцінки невизначеності має містити звіт із переліком компонентів і способами їх оцінки.

Компоненти з оцінюванням типу А характеризуються дисперсією S_i^2 (чи СКВ S_i) і кількістю ступенів свободи v_i, яка залежить від кількості вимірювань. Якщо необхідно, наводять коваріацію.

Компоненти з оцінюванням типу В характеризуються величинами u_j^2, які можна розглядати з наближенням, як ті, що відповідають дисперсіям; величини u_j розглядають подібно СКВ.

Отже, невизначеність вимірювання включає багато компонентів. Деякі з них можна охарактеризувати статистичним розподілом результатів ряду вимірювань і відповідним до цього розподілу значенням СКВ. Це компоненти з оцінюванням типу А. Решту компонентів також можна охарактеризувати СКВ, але отриманим за допомогою взятого (від себе) розподілу ймовірності з використанням досвіду експериментатора чи іншої інформації. Ці компоненти визначають за оцінюванням типу В.

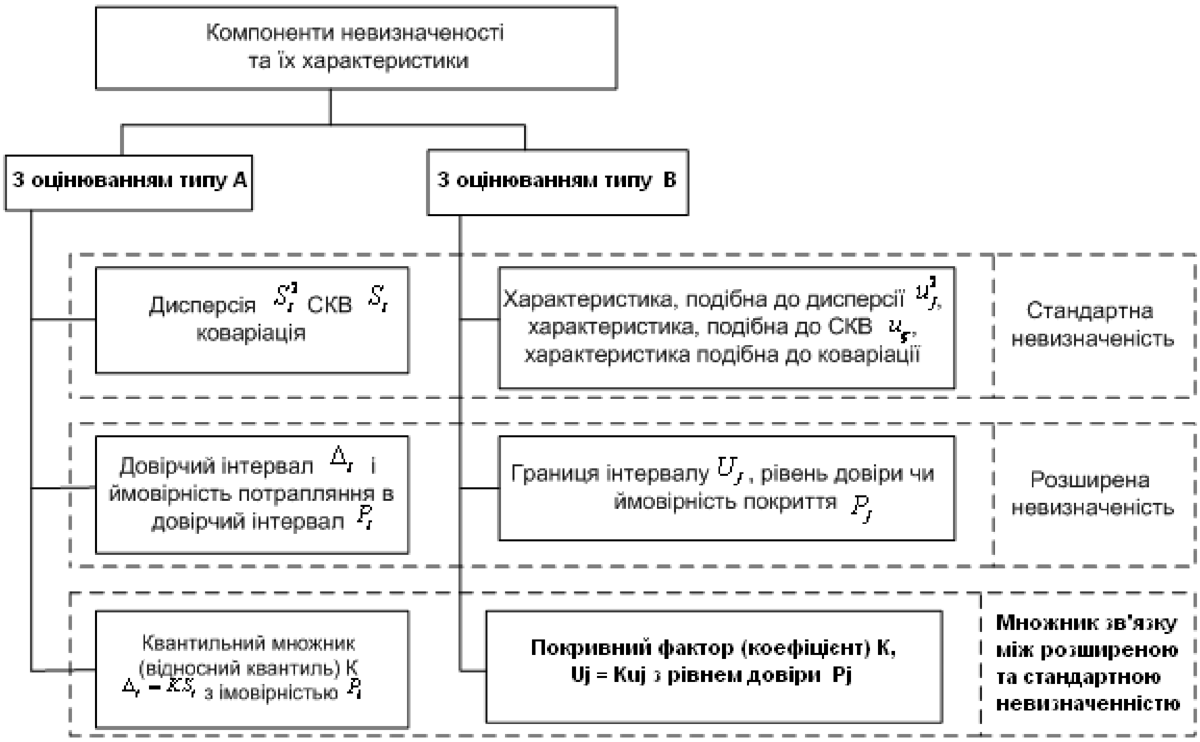


Рисунок 5.3 ─ Класифікація компонентів невизначеності залежно від способу їх оцінки

Перехід від стандартної до розширеної невизначеності під час оцінювання типу В виконують за допомогою покривного фактора (коефіцієнта) К, який вибирають на основі рівня довіри для інтервалу від $x-U$ до $x+U$. Зазвичай К знаходиться в межах від 2 до 3. На практиці вибирають покривний фактор К, який забезпечує інтервал $x \pm U = x \pm ku$, що відповідає рівням довіри 95 та 99 %. Орієнтовні рекомендації настанов ISO: К = 2 для 95 % і К=3 для 99%.

Подання результату в настановах ISO більш уніфіковане і просте, що важливо для користувачів результатів вимірювання, з яких не всі є спеціалістами в галузі метрології. Але спрощення деяких положень, наприклад процедури обчислення розширеної невизначеності, призводить до багатьох непорозумінь під час практичних розрахунків. Можна навести такий приклад.

У прямих вимірюваннях мають місце дві похибки з границями $\pm\Delta_1 = \pm\Delta_2 = \pm\Delta$. Якщо знайти розширену невизначеність з рівнем довіри 1 на підставі додавання границь (користуючись правилом здорового глузду), то отримаємо $U = 2\Delta$ (з рівнем довіри 1).

Але якщо знайти СКВ з використанням оцінки «зверху» для рівномірного розподілу, то отримаємо стандартну невизначеність

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = 0{,}817\Delta .$$

Якщо далі, керуючись настановами ISO, покласти для рівня довіри Р=0,99 покривний коефіцієнт $K = 3$, то отримаємо розширену

$$U = 3 \cdot 0{,}817\Delta = 2{,}45\Delta .$$

Отримане значення набагато перевищує максимально можливе.

Цей приклад є свідченням того, що процедуру додавання похибок і обчислення розширеної невизначеності слід розглядати більш детально.

5.2.2 Правила подання результату вимірювання

Прийняті позначення [9]. У поданні результату вимірювання стандартну невизначеність позначають літерою u, стандартну комбіновану невизначеність - u_c, розширену невизначеність - U .

Приклади подання результату вимірювання:

$$1)\ x; u;\ 3)\ x \pm U; P;$$

$$2)\ x, u_c;\ 4)\ x \pm U;$$

Приклад 4 застосовують для випадків, коли рівень довіри Р дорівнює одиниці. До прийнятих форм подання невизначеності можна додати коментар, у якому зазначають кількість ступенів свободи, коваріації, розподіли невизначеності, умови проведення досліду, час проведення досліду, модель об'єкта, прийняту для вимірювання тощо.

Значущі цифри. Слід розглянути декілька основних правил запису результату вимірювання. По-перше, оскільки невизначеність пов'язана з оцінками похибок, то її неможливо подати з високою точністю. Якщо ми виміряємо, наприклад, прискорення сили тяжіння g, то було б абсурдним подавати результат у такому вигляді:

$$g=(9{,}82\pm0{,}04385)$$

Неймовірно, щоб похибка вимірювання була відома до чотирьох значущих цифр. У результаті високоточних вимірювань наводять невизначеність з двома значущими цифрами, а в решті можна обмежитись однією.

Правило запису невизначеності №1

Значення невизначеності подають не більш ніж двома значущими цифрами.

Правило запису невизначеності №2

У навчальній лабораторії значення невизначеності зазвичай заокруглюють до однієї значущої цифри.

Отже, якщо певний розрахунок невизначеності зводять до значення $U = 0{,}04385\ m/c^2$, то його треба заокруглити до значення $U = 0{,}04\ m/c^2$. Висновок слід переписати так:

$$g=(9{,}82\pm0{,}04)$$

Є тільки один важливий виняток з правила № 2. Якщо перша цифра одиниця, то в невизначеності краще зберегти дві значущі цифри. Наприклад, припустімо, що за певним розрахунком значення невизначеності $U = 0{,}14$. Заокруглити це значення до $U = 0{,}1$ означало б зменшити невизначеність на 40%, тому правильніше зберегти дві значущі цифри, тобто залишити $U = 0{,}14$. Той самий аргумент, імовірно, можна було б використати, якщо перша цифра невизначеності - 2 чи 3.

Правило запису невизначеності №3

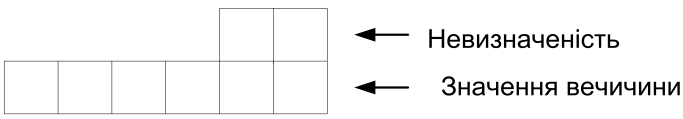
Якщо перші значущі цифри невизначеності 1, 2, 3, то в її поданні вказують дві значущі цифри.

Коли невизначеність результату вимірювання розраховано, слід проаналізувати, які цифри в оцінці значення вимірюваної величини треба залишити. Для цього використовують наступне правило подання значення виміряної величини.

Правило подання значення виміряної величини U

Остання значуща цифра в будь-якому значенні виміряної величини зазвичай має бути того самого порядку (знаходитись у тій самій десятковій позиції), що й остання значуща цифра невизначеності.

Те саме правило можна викласти так:



Місце останньої значущої цифри в значенні вимірюваної величини визначається місцем останньої цифри невизначеності.

Наприклад, оцінку значення вимірюваної величини 92,81 з невизначеністю 0,7 треба заокруглювати до 92,8. Якщо ж невизначеність становить, наприклад, 7, то результат заокруглюють до значення 93.

Однак у розрахунках використані числа мають зазвичай вміщувати більше значущих цифр, ніж це вказано в попередніх правилах. Це зменшить похибки від заокруглення чисел. Тільки кінцевий результат треба заокруглити відповідно до наведених вище правил.

Розглянемо декілька додаткових міркувань щодо подання результату вимірювання.

Якщо нема спеціальних вимог до вибору рівня довіри у поданні розширеної невизначеності, то використовують P = 0,95.

Для обмежених розподілів невизначеності у запису результату з розширеною невизначеністю можна використати граничне значення, що відповідає рівню довіри P=1. Це значення рівня довіри найчастіше не вказують. Тоді результат вимірювання подають так:

$$x_1 \pm U(x_1),$$

де $U(x_1)$ — розширена невизначеність, що відповідає рівню довіри P = 1. *Приклади подання результату вимірювання:*

$$\mathrm{R} = (1500 \pm 12)\ \text{Ом};$$

$$\mathrm{R} = (1{,}15 \pm 0{,}07)\ \text{A}.$$

Отже, у цьому розділі викладено форми подання результату вимірювання з невизначеністю, які в подальших розділах буде використано під час розгляду методик обробки даних вимірювань.

РОЗДІЛ 6. АНАЛОГОВІ ВИМІРЮВАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

6.1. Аналогове вимірювальне перетворення. Основні визначення

Аналогове вимірювальне перетворення – це вимірювальне перетворення фізичної величини.

Згідно [4], ***вимірювальне перетворення*** – це вимірювальна операція, при якій вхідна фізична величина перетворюється у вихідну, функціонально зв'язану з нею.

Принципом вимірювального перетворення називають фізичний ефект, на якому воно засновано.

Вимірювальні перетворення розділяються на:

- перетворення зі зміною роду величини;
- без зміни роду величини.

Які у свою чергу можуть розділятися на *лінійні* і *нелінійні* (які умовно називаються функціональними).

З представлених видів аналогового перетворення виділяють *масштабне вимірювальне перетворення*.

Масштабне вимірювальне перетворення – лінійне вимірювальне перетворення без зміни роду величини.

6.1.1. Види вимірювальних перетворювачів

Вимірювальний перетворювач (ВП) – вимірювальний пристрій, що реалізує вимірювальне перетворення.

Вимірювальні перетворювачі можуть бути наступних видів:

- Первинний вимірювальний перетворювач, сенсор – вимірювальний перетворювач, що безпосередньо взаємодіє з вимірювальною величиною.

В одному засобі вимірювання може бути кілька первинних перетворювачів.

- ***Датчик*** [12] – конструктивно відособлений первинний вимірювальний перетворювач, від якого надходить проміжний вимірювальний сигнал.

Датчик може бути винесений на значну відстань від засобу вимірювання.

- ***Проміжний вимірювальний перетворювач*** – вимірювальний перетворювач, що займає місце у вимірювальному ланцюзі після первинного перетворювача.

Вимірювальні перетворювачі можна розділити на наступні групи (рис.6.1).

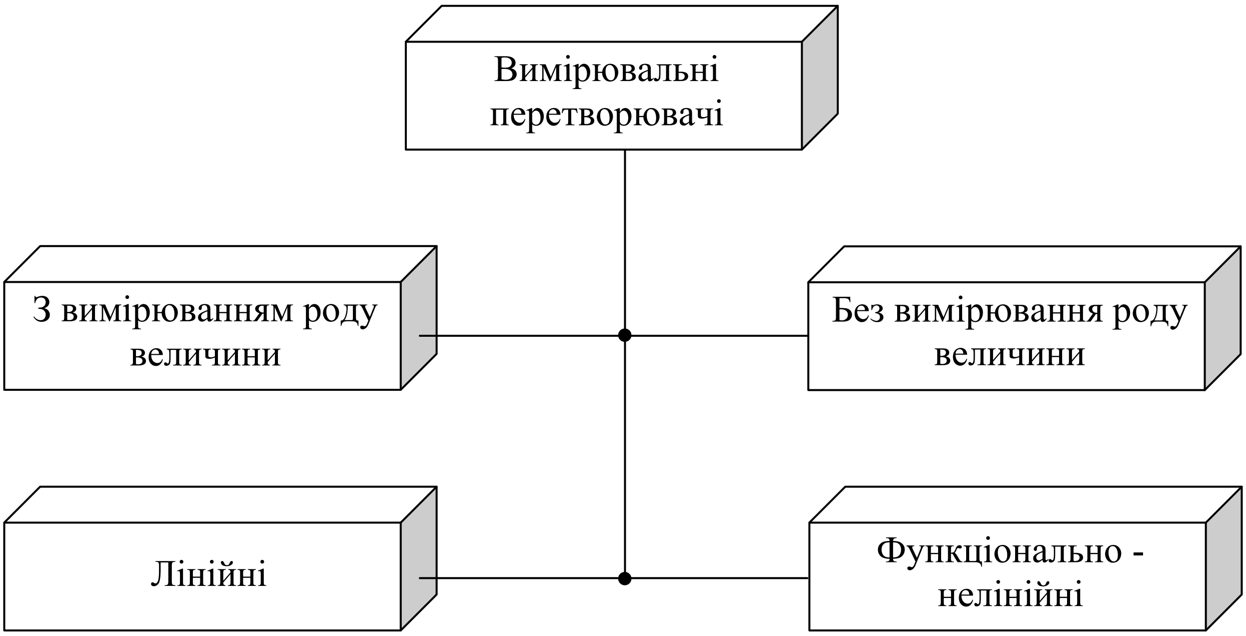


Рис.6.1.- Систематизація вимірювальних перетворювачів

Відповідно до виділених видів (рис.6.1) ***масштабний вимірювальний перетворювач*** – лінійний вимірювальний перетворювач без зміни роду величини, але зі зміною розміру фізичної величини.

6.1.2. Характеристики вимірювальних перетворювачів

Основною характеристикою перетворювача є його функція перетворення.

Функція перетворення (вимірювального перетворювача) – залежність між вихідною і вхідною величинами вимірювального перетворювача (ВП).

Якщо розглядається вхідний і вихідний сигнал ВП, то визначення формулюють, у такий спосіб:

Функція перетворення ВП – залежність між інформативними параметрами вихідного і вхідного сигналу.

Вимірювальний сигнал – сигнал, один або кілька параметрів якого є інформативними.

Інформативний параметр сигналу – параметр сигналу, що функціонально зв'язаний з досліджуваною або вимірювальною величиною.

Таким чином, зв'язок між вхідною X і вихідною Y величинами перетворювача (рис. 6.2) описується функцією перетворення $Y = f(X)$, де X і Y істинні (при теоретичному сигналі) і дійсні (при експериментальних дослідженнях) значення вихідної і вхідної величини [14].

Оскільки істинні значення величин не можуть бути визначені, то, відповідно, не може бути визначена істинна функція перетворення. Можна визначити лише дійсну функцію перетворення, приймаючи за X і Y деякі їхні дійсні значення, що настільки наближаються до істинних, що для даної мети можуть використовуватися замість них.

У загальному випадку, функції перетворення окремих однотипних ВП через наявність похибок перетворення будуть трохи відрізнятися одна від одної, тобто кожен окремий перетворювач може характеризуватися своєю індивідуальною функцією перетворення. Як узагальнена характеристика ВП даного типу приймається деяка усереднена функція перетворення великої групи однотипних перетворювачів. Вимірювальному перетворювачеві присвоюють або визначену в такий спосіб усереднену функцію перетворення, або деяку математичну функцію, що є найкращим наближенням до неї.

Присвоєна вимірювальному перетворювачеві функція перетворення називається *номінальною функцією перетворення*. Вона позначається $f_{sf}(X)$ і може бути записана аналітично, а також представлена у виді таблиці і графіка.

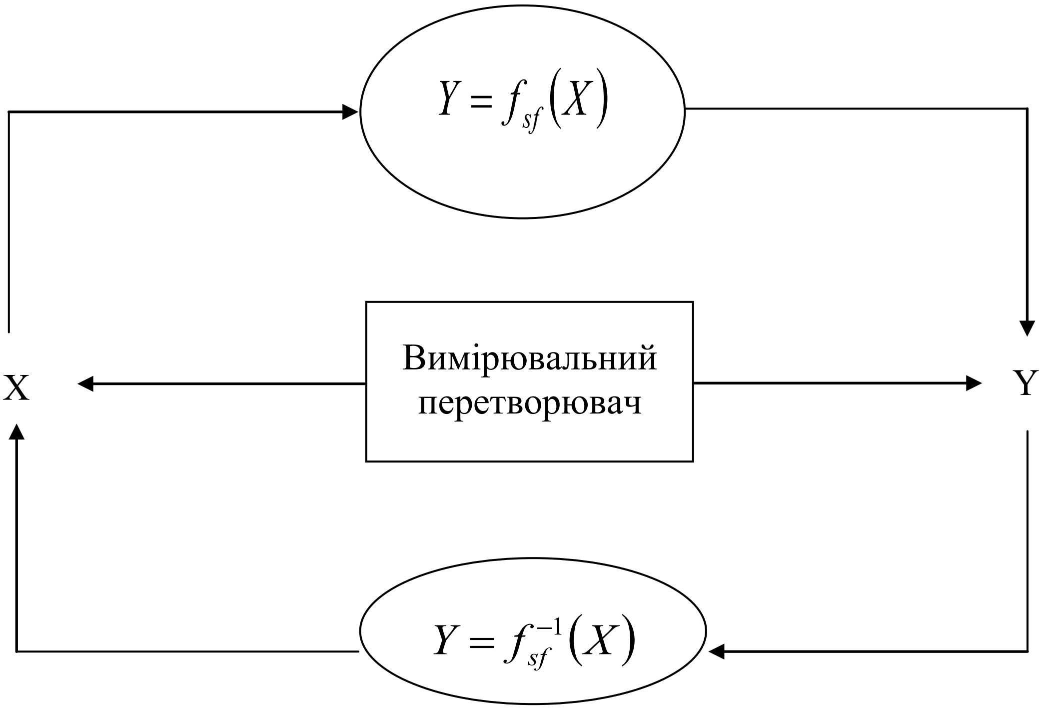


Рис.6.2 - Позначення, введені для характеристик перетворювача

Якщо номінальна функція перетворення лінійна і її графік проходить через початок координат, для характеристики перетворювача використовується коефіцієнт перетворення.

Коефіцієнтом перетворення називають відношення вихідної величини ВП Y до вхідної величини X

$$k = \frac{Y}{X}. \tag{6.1}$$

Номінальний коефіцієнт перетворення k_{sf} визначається за номінальною функцією перетворення $Y = f_{zf}(X)$.

У загальному випадку величини X і Y є величинами різнорідними. За допомогою зворотної характеристики перетворення f_{sf}^{-1} вихідна величина може бути приведена до входу ВП.

Для порівняння вихідного і вхідного сигналу ВП (що використовується, наприклад, при аналізі ВП у динамічному режимі) визначають приведену характеристику перетворення $f_{sf\,привед}$

$$f_{sf_{привед}} = \frac{f_{sf}(X)}{k_{sf}}. \tag{6.2}$$

Похідна від функції перетворення

$$S = \frac{dY}{dX} \tag{6.3}$$

або в кінцевих збільшеннях

$$S = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \tag{6.4}$$

називається ***чутливістю*** ВП.

Для лінійних перетворень чутливість постійна і дорівнює коефіцієнтові перетворення.

6.1.3. Похибки вимірювальних перетворювачів

За способом вираження похибки ВП підрозділяють на абсолютні, відносні, приведені. Оскільки в загальному випадку вхідна і вихідна величини перетворювача різнорідні, то розглядають похибки, приведені як до виходу ВП, так і до входу.

Тоді найменування похибки може бути, наприклад, абсолютна похибка, приведена до входу ВП, або абсолютна похибка по входу. За аналогією може бути абсолютна похибка по виходу.

Оскільки виникнення похибок може бути наслідком розбіжності дійсної функції перетворення $f(X)$ і номінальної функції перетворювача $f_{sf}(X)$, то абсолютна похибка по виходу може бути визначена як

$$\Delta_{вих} = f(X) - f_{sf}(X) = Y - f_{sf}(X). \tag{6.5}$$

Для лінійного ВП

$$\Delta_{вих} = kX - k_{sf}X = X \cdot (k - k_{sf}) = X \cdot \Delta K, \tag{6.6}$$

де ΔK – відхилення значення коефіцієнта перетворення від номінального розміру.

Абсолютна похибка по входу дорівнює

$$\Delta_{вх} = f_{sf}^{-1}(Y) - X. \tag{6.7}$$

Для лінійного ВП

$$\begin{gathered}\Delta_{вх} = \frac{Y}{k_{sf}} - X = X \cdot \frac{k}{k_{sf}} - X = X \cdot \frac{k_{sf} + \Delta K}{k_{sf}} - X = \\ X \cdot \left(1 + \frac{\Delta K}{k} - 1\right) = \frac{\Delta K}{k_{sf}} \cdot X.\end{gathered} \tag{6.8}$$

Відносні похибки по входу і виходу будуть відповідно рівні

$$\delta_{вих} = \frac{\Delta_{вих}}{Y} = \frac{Y - f_{sf}(X)}{Y} = 1 - \frac{f_{sf}(X)}{Y}. \tag{6.9}$$

Для лінійного ВП

$$\delta_{вих} = \frac{X \cdot \Delta K}{Y} = \frac{\Delta K}{k}, \tag{6.10}$$

$$\delta_{вх} = \frac{\Delta_{вх}}{X} = \frac{f_{sf}^{-1}(Y)}{X} - 1. \tag{6.11}$$

Для лінійного ВП

$$\delta_{вх} = \frac{\Delta K}{k_{sf}}. \tag{6.12}$$

З порівняння виразів (6.10) і (6.12) для лінійного ВП видно, що якщо похибки малі, то $k_{sf} \approx k$ і $\delta_{вих} \approx \delta_{вх}$. Тому для лінійних перетворювачів приймають як нормовану характеристику відносну мультиплікативну похибку (мультиплікативна похибка – це похибка коефіцієнта перетворення) і позначають її $\delta_м$ (незалежно від приведення до входу або виходу).

Якщо похибка перетворювача викликана, наприклад, тепловими шумами перетворювача, то вона за залежністю від вимірюваної величини класифікується як адитивна похибка, тобто постійна за абсолютним значенням. Нехай адитивна похибка Δ_a приведена до виходу перетворювача, тобто абсолютна похибка по виходу дорівнює

$$\Delta_{вих} = \Delta_a, \tag{6.13}$$

тобто на виході ми маємо

$$Y' = Y + \Delta_a.$$

Тоді абсолютну похибку по входу знаходять відповідно до виразу (6.7)

$$\Delta_{вх} = f_{sf}^{-1}(Y) - X. \tag{6.14}$$

Для лінійного ВП вираз (6.14) можна представити у виді

$$\Delta_{вх} = \frac{Y'}{k_{sf}} - X = \frac{Y + \Delta_a}{k_{sf}} - X = X \cdot \frac{k}{k_{sf}} - X + \frac{\Delta_a}{k_{sf}}. \tag{6.15}$$

Якщо прийняти , що $k \approx k_{sf}$ (тобто мультиплікативна похибка відсутня) , то

$$\Delta_{вх} = \frac{\Delta_a}{k_{sf}}. \tag{6.16}$$

Розглянемо нормування приведеної адитивної похибки для лінійного перетворювача.

Приведена похибка по виходу дорівнює

$$\gamma_{вих} = \frac{\Delta_{вих}}{Y_H} = \frac{\Delta_{вих}}{k_{sf} \cdot X_H} = \frac{\Delta_a}{k_{sf} \cdot X_H}. \tag{6.17}$$

Приведена похибка по входу

$$\gamma_{вх} = \frac{\Delta_{вх}}{X_H} = \frac{\Delta_a}{k_{sf} \cdot X_H}. \qquad (6.18)$$

З порівняння виразів (6.17) і (6.18) можна зробити висновок про те, що в лінійному ВП приведені адитивні похибки по входу і виходу будуть рівні. Тому як нормована характеристика використовується одна приведена адитивна похибка (без вказівки по входу чи по виходу) , тобто $\gamma_{вх} = \gamma_{вих} = \gamma$.

А тепер повернемося до виразу (6.15) і використаємо прийняте співвідношення $k = \Delta_k + k_{sf}$ (тобто розглянемо випадок наявності й адитивної й мультиплікативної похибок)

$$\Delta_{вх} = X \cdot \frac{k_{sf} + \Delta K}{k_{sf}} - X + \frac{\Delta_a}{k_{sf}}. \qquad (6.19)$$

Так як $\frac{\Delta K}{k} \cdot X = \delta_M$, то

$$\Delta_{вх} = \delta_M \cdot X + \frac{\Delta_a}{k_{sf}}, \qquad (6.20)$$

тоді відносна похибка дорівнює

$$\delta = \frac{\Delta_{вх}}{X} = \delta_M + \frac{\Delta_a}{k_{sf} \cdot X}. \qquad (6.21)$$

Відповідна їй приведена похибка дорівнює (6.18). Тоді вираз (6.21) можна перетворити в такий спосіб:

$$\delta = \delta_M + \frac{\Delta_a}{k_{sf} \cdot X} \cdot \frac{X_H}{X_H} = \delta_M + \gamma \cdot \frac{X_H}{X}. \qquad (6.22)$$

Таким чином, отримали вираз, що використовується для нормування сумарної похибки лінійного ВП.

6.2. Структурний аналіз аналогових лінійних вимірювальних перетворювачів

6.2.1. Загальні положення

При структурному аналізі ЗВТ представляють у виді структурної моделі, у якій як структурні елементи використовуються окремі блоки ЗВТ, зв'язані відповідним чином. У якості вихідних даних при аналізі використовується модель вхідного сигналу (величини), характеристики структурних блоків (коефіцієнти перетворення). Метою структурного аналізу є одержання рівняння ЗВТ і рівняння похибки ЗВТ. Тому на структурній моделі вказують джерела похибок [24].

Рівняння вимірювального перетворювача (функцію перетворення) представляють у наступному виді:

$$Y = f\left(x; a_1,..., a_n; b_1,..., b_m\right), \qquad (6.23)$$

де Y, x – інформативні параметри вихідного і вхідного сигналів ВП відповідно;

$a_1,\ldots a_n$ – неінформативні параметри вхідного сигналу;

$b_1,..b_m$ – параметри вимірювального перетворювача.

Як правило, джерелами мультиплікативних похибок є зміни коефіцієнтів перетворень блоків, що входять у рівняння (6.23). Джерела адитивних похибок вводяться в рівняння (6.23), тобто додаються.

Якщо прийняти модель $X = cons$ і представити рівняння у виді:

$$Y = f\left(x; b_1,..., b_m\right), \qquad (6.24)$$

то видно, що зміна Y буде викликана змінами коефіцієнтів b_1, … ,b_m. Якщо представити ці зміни у виді абсолютних похибок $\Delta_1,...\Delta_m$, то за умови, що похибки малі:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_i . \qquad (6.25)$$

Рівняння похибки ΔY вимірювального перетворювача (ВП) аналогічно за видом рівнянню похибки опосередкованого вимірювання, тому розглянуті раніше методи розрахунку, можуть бути використані при структурному аналізі.

6.2.2. Аналіз розімкнутої структурної схеми з лінійними ланками

6.2.2.1. Рівняння вимірювального перетворювача

ВП з розімкнутою структурною схемою представлений на рис.6.3.

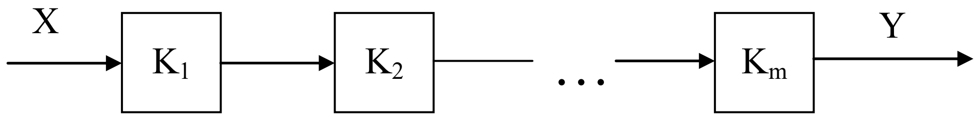


Рис.6.3 - ВП з розімкнутою структурною схемою

Рівняння ВП має вигляд:

$$Y = \prod_{i=1}^{m} k_i \cdot x = k_П \cdot x, \qquad (6.26)$$

де $k_П$ – загальний коефіцієнт перетворення ВП, рівний

$$k_П = \prod_{i=1}^{m} k_i , \qquad (6.27)$$

де k_i – коефіцієнти перетворення окремих ланок.

З виразу (6.26) видно, що ***в ВП з розімкнутою структурною схемою легко отримати великий коефіцієнт перетворення, тобто високу чутливість.***

6.2.2.2. Рівняння мультиплікативної похибки

Сструктурна схема ВП з вказаними мультиплікативними і адитивними похибками наведена на Рисунку 6.4.

Сумарна мультиплікативна похибка обумовлена відмінністю коефіцієнта перетворення $k_П$ від номінального значення $k_{П sf}$.

$$\delta_M = \frac{k_П}{k_{П_{sf}}} - 1. \tag{6.28}$$

З іншого боку, так як $k_П$ являє собою залежність від $k_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ типу добутку, то

$$k_П = k_{П_{sf}}\left(1 + \sum_{i=1}^{m}\delta_i\right), \tag{6.29}$$

де δ_i – мультиплікативні похибки окремих ланок.

Тоді, з урахуванням виразів (6.28) і (6.29), одержуємо

$$\delta_M = \sum_{i=1}^{m}\delta_i. \tag{6.30}$$

Якщо похибки окремих ланок ***систематичні***, то рівняння мультиплікативної похибки приймає вид

$$\delta_{MS} = \sum_{i=1}^{m}\delta_{iS}. \tag{6.31}$$

Якщо похибки окремих ланок ***випадкові і некорельовані***, то СКВ сумарної мультиплікативної похибки дорівнює

$$\sigma\left[\dot{\delta}_M\right] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma^2\left[\dot{\delta}_i\right]}. \tag{6.32}$$

Якщо похибки окремих ланок задані ***у виді границь інтервалу*** $\pm\delta_i$**, то**

$$\delta_M = \pm\sum_{i=1}^{m}\left|\delta_i\right|. \qquad (6.33)$$

З виразів (6.32) і (6.33) видно, що похибки окремих блоків накопичуються.

Розімкнута структурна схема при великій кількості блоків має велику похибку

6.2.2.3. Рівняння адитивної похибки

Для аналізу адитивних похибок необхідно вказати їхні джерела на структурній схемі ВП (рис.6.4). Тоді рівняння ВП приймає наступний вид:

$$Y' = \left\{\left[\left(x + \Delta_1\right)\cdot k_1 + \Delta_2\right]\cdot k_2 + \ldots + \Delta_m\right\}\cdot k_m. \qquad (6.34)$$

Тоді приведена адитивна похибка буде дорівнювати

$$\gamma = \frac{Y' - Y}{Y_H} = \frac{\Delta_1}{x_H} + \frac{\Delta_2}{k_1 x_H} + \ldots + \frac{\Delta_m}{\prod\limits_{i=1}^{m-1} k_i x_H}, \qquad (6.35)$$

де $Y_H = k_\Pi \cdot x_H$.

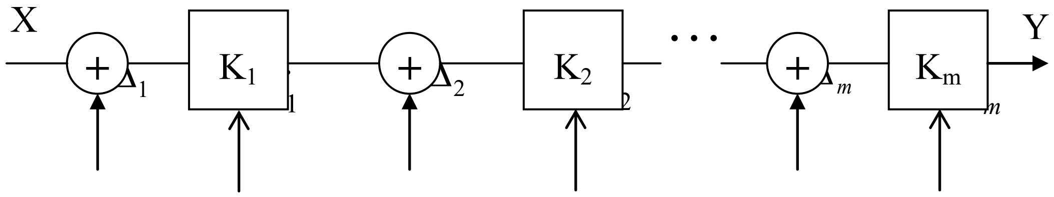


Рис.6.4 - ВП з розімкнутою структурною схемою і вказаними похибками

З аналізу виразу (6.35) можна зробити наступні висновки:

- ***для одержання високої точності похибка на вході першого блоку повинна бути набагато менше вхідної величини;***
- ***адитивні похибки, що виникають після першого блоку, можуть***

бути зменшені за рахунок збільшення коефіцієнта перетворення першого блоку.

Для ***систематичних похибок*** вираз (6.35) приймає вигляд:

$$\gamma_S = \frac{\Delta_{1S}}{x_H} + \frac{\Delta_{2S}}{k_1 x_H} + \ldots + \frac{\Delta_{mS}}{\prod_{i=1}^{m-1} k_i x_H}. \qquad (6.36)$$

Для ***випадкових некорельованих похибок*** вираз (6.35) має вигляд:

$$\sigma\left[\overset{\circ}{\gamma}\right] = \sqrt{\frac{1}{x_H^2}\sigma^2\left[\overset{\circ}{\Delta}_1\right] + \frac{1}{k_1^2 x_H^2}\sigma^2\left[\overset{\circ}{\Delta}_2\right] + \ldots + \frac{1}{\prod_{i=1}^{m-1} k_i^2 x_H^2}\sigma^2\left[\overset{\circ}{\Delta}_m\right]}. \qquad (6.37)$$

Для похибок, представлених ***у виді границь інтервалу*** $\pm\Delta_i$, границі інтервалу сумарної адитивної похибки рівні:

$$\gamma = \pm\left[\frac{\Delta_1}{x_H} + \frac{\Delta_2}{k_1 x_H} + \ldots + \frac{\Delta_m}{\prod_{i=1}^{m-1} k_i x_H}\right]. \qquad (6.38)$$

6.2.3. Аналіз замкнутої структурної схеми з лінійними ланками

6.2.3.1. Рівняння вимірювального перетворювача

ВП із замкнутою структурною схемою представлений на рис.6.5.

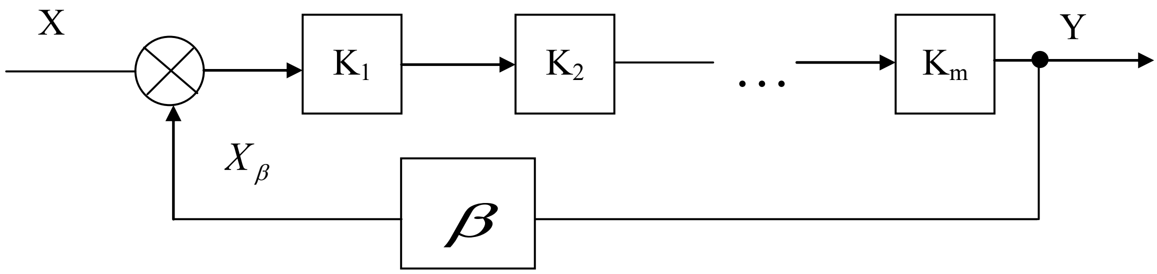


Рис. 6.5 - ВП із замкнутою структурною схемою

На рисунку позначені:

$k_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – коефіцієнти ланок прямого перетворення;

β - коефіцієнт перетворення ланки зворотного зв'язку.

Для знаходження рівняння перетворення (функції перетворення) запишемо проміжні співвідношення.

Так як зворотній зв'язок від'ємний, на виході пристрою порівняння (віднімання) одержуємо

$$\Delta x = x - x_{\beta}. \tag{6.39}$$

Тоді

$$Y = \Delta x \cdot k, \tag{6.40}$$

де k – загальний коефіцієнт ланок прямого перетворення

$$k = \prod_{i=1}^{m} k_i.$$

Значення величини на виході ланки зворотного зв'язку дорівнює

$$x_{\beta} = \beta \cdot Y. \tag{6.41}$$

Підставивши (6.39) у (6.40), одержуємо

$$Y = \left(x - x_{\beta}\right) \cdot k. \tag{6.42}$$

Підставивши в (6.42) вираз (6.41), одержуємо

$$Y = x \cdot k - k \cdot \beta \cdot Y. \tag{6.43}$$

З (6.43) одержуємо функцію перетворення ВП із замкнутою структурною схемою

$$Y = \frac{k}{1 + k \cdot \beta} \cdot x = k_П \cdot x, \tag{6.44}$$

де

$$k_П = \frac{k}{1 + k \cdot \beta}. \tag{6.45}$$

З виразу (6.44) видно, що:

Загальний коефіцієнт перетворення при введенні зворотного зв'язку зменшується в (*$1 + k \cdot \beta$*) раз. Таким чином, недоліком такої структурної схеми є зменшення коефіцієнта перетворення, а отже і чутливості.

6.2.3.2. Рівняння мультиплікативної похибки

Для оцінювання мультиплікативної похибки введемо наступні позначення:

$\delta_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ - похибка *i-ої* ланки прямого перетворення;

δ_β - похибка ланки зворотного зв'язку.

Тоді відповідно до виразу (6.25)

$$\begin{aligned} \Delta_{K_П} &= \frac{\partial k_П}{\partial k} \Delta k + \frac{\partial k_П}{\beta} \Delta \beta = \frac{\partial k_П}{\partial k} \delta_k k + \frac{\partial k_П}{\beta} \delta_\beta \beta = \\ &= \frac{1 + k\beta - k\beta}{(1 + k\beta)^2} \delta_k k - \frac{k^2}{(1 + k\beta)^2} \delta_\beta \beta = \frac{k}{(1 + k\beta)^2} \delta_k - \frac{k^2 \beta}{(1 + k\beta)^2} \delta_\beta. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Відносна мультиплікативна похибка дорівнює

$$\delta_M = \frac{\Delta_{k_П}}{k_П} = \frac{\Delta_{k_П}(1 + k\beta)}{k} = \frac{1}{(1 + k\beta)} \delta_k - \frac{k\beta}{(1 + k\beta)} \delta_\beta. \tag{6.47}$$

Так як δ_k – загальна похибка ланок прямого перетворення, то

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{m} \delta_i$$

і вираз (6.47) приймає остаточний вид

$$\delta_M = \frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_i}{1+k\beta} - \frac{\delta_\beta k\beta}{1+k\beta}. \tag{6.48}$$

Так як $k\beta$ ***>>1 , то похибки ланок прямого перетворення значно зменшуються при введенні зворотного зв'язку, отже, точність ВП підвищується.***

Для ***систематичних похибок*** вираз (6.48) приймає вид

$$\delta_{MS} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_{iS}}{1+k\beta} - \frac{\delta_{\beta S} k\beta}{1+k\beta}. \tag{6.49}$$

Для ***випадкових некорельованих похибок*** вираз (7.48) приймає вид

$$\sigma\left[\overset{\circ}{\delta}\right] = \sqrt{\frac{1}{(1+k\beta)^2}\sum_{i=1}^{m}\sigma^2\left[\overset{\circ}{\delta}_i\right] + \frac{(k\beta)^2}{(1+k\beta)^2}\sigma^2\left[\overset{\circ}{\delta}_\beta\right]}. \tag{6.50}$$

Для похибок, представлених у виді границь інтервалу $\pm\delta_{iS}$, границі інтервалу сумарної мультиплікативної похибки мають вигляд:

$$\delta_M = \pm\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_{iS}}{1+k\beta} + \frac{\delta_{\beta S} k\beta}{1+k\beta}\right]. \tag{6.51}$$

Аналіз адитивних похибок ВП із замкнутою структурною схемою аналогічний аналізові похибок ВП з розімкнутою схемою.

6.2.4. Аналіз комбінованої структурної схеми з лінійними ланками

6.2.4.1. Рівняння вимірювального перетворювача

ВП з розімкнутою структурною схемою мають високу чутливість і низьку точність (при великому числі ланок).

ВП із замкнутою структурною схемою мають низьку чутливість і високу точність. Тому, якщо хочуть одержати і високу точність і високу чутливість, використовують комбіновану структурну схему, у якій самі неточні ланки охоплюють зворотним зв'язком.

Розглянемо як приклад ВП з комбінованою структурною схемою, приведений на рис. 6.6.

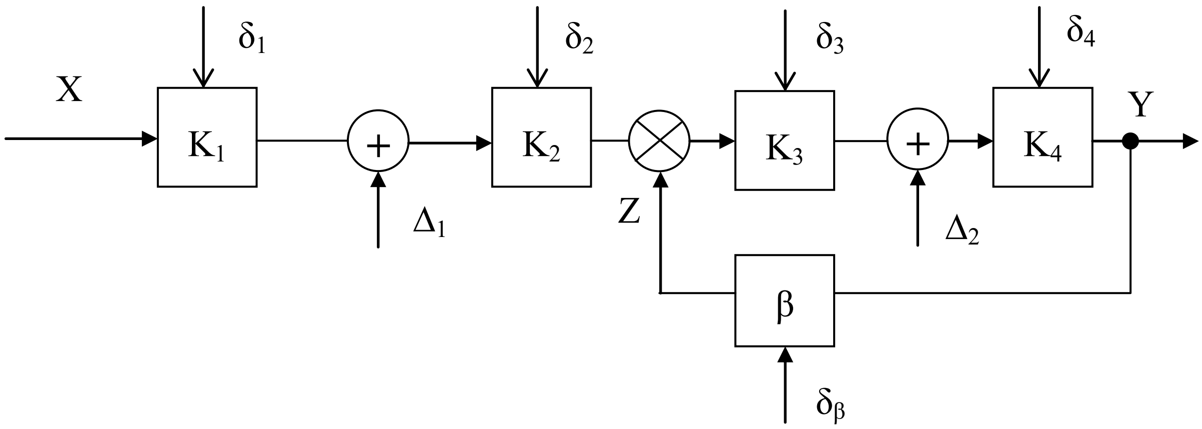


Рис. 6.6 - ВП з комбінованою структурною схемою

Функція перетворення ВП має вигляд:

$$Y = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot x = k_П \cdot x, \qquad (6.52)$$

де $k_П$ – коефіцієнт перетворення, рівний

$$k_П = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta}.$$

Номінальну функцію перетворення ВП одержують за номінальними коефіцієнтами перетворення окремих блоків

$$Y = k_{\Pi sf} \cdot x, \tag{6.53}$$

де

$$k_{\Pi sf} = \frac{k_{1sf} \cdot k_{2sf} \cdot k_{3sf} \cdot k_{4sf}}{1 + k_{3sf} k_{4sf} \beta_{sf}}. \tag{6.54}$$

6.2.4.2. Рівняння мультиплікативної похибки

Рівняння мультиплікативної похибки ВП з комбінованою структурною схемою має вигляд:

$$\delta_M = \delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \delta_3 + \frac{1}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \delta_4 - \\ - \frac{k_3 \cdot k_4 \cdot \beta}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \delta_\beta. \tag{6.55}$$

6.2.4.3. Рівняння адитивної похибки

Для одержання рівняння адитивної похибки запишемо функцію перетворення (6.52) з додаванням адитивних похибок. Для зручності аналізу введемо проміжну величину Z, розділивши ділянки з розімкнутою і замкнутою структурною схемою

$$z = \left[x \cdot k_1 + \Delta_1\right] \cdot k_2 = x \cdot k_1 \cdot k_2 + \Delta_1 \cdot k_2. \tag{6.56}$$

Для замкнутої частини схеми

$$\left[\left(z - \beta \cdot Y\right) \cdot k_3 + \Delta_2\right] \cdot k_4 = Y' \quad або \quad z \cdot k_3 \cdot k_4 - \beta \cdot Y \cdot k_3 \cdot k_4 + \Delta_2 \cdot k_4 = Y'.$$

Перенесемо складові з Y' у ліву частину рівності, одержуємо

$$Y' \cdot \left(1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta\right) = z \cdot k_3 \cdot k_4 + \Delta_2 \cdot k_4$$

або

$$Y' = z \cdot \frac{k_3 \cdot k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} + \frac{k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \Delta_2 \qquad (6.57)$$

Підставивши в (6.56) вираз Z з (6.55), одержуємо

$$\delta_M = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot x + \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \Delta_1 + \frac{k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \Delta_2. \qquad (6.58)$$

Абсолютна адитивна похибка по виходу дорівнює

$$\Delta_{вих} = Y' - Y = \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \Delta_1 + \frac{k_4}{1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta} \cdot \Delta_2. \qquad (6.59)$$

Рівняння для приведеної адитивної похибки має вигляд

$$\gamma = \frac{\Delta_{вих}}{Y_H} = \frac{\Delta_{вих}}{x_H \cdot k_П} = \frac{\Delta_{вих} \cdot \left(1 + k_3 \cdot k_4 \cdot \beta\right)}{x_H \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4} = \frac{\Delta_1}{k_1 \cdot x_H} + \frac{\Delta_2}{x_H \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}. \qquad (6.60)$$

6.2.5. Узагальнений структурний аналіз вимірювальних перетворювачів

6.2.5.1. Послідовність дій при оцінюванні сумарної похибки

Послідовність дій при оцінюванні сумарної похибки за допомогою узагальненого структурного аналізу така:

1) Записують рівняння перетворення (функцію перетворення) у виді:

$$y = k_П \cdot x, \qquad (6.61)$$

де $k_П$ знаходять у відповідності зі структурною схемою перетворювача, тобто

$$k_П = \varphi(k_1,...,k_m),\qquad(6.62)$$

де $k_1,...,k_m$ - коефіцієнти перетворення окремих ланок ВП.

2) Рівняння мультиплікативної складової похибки представляють у виді:

$$\delta_M = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \delta_i,\qquad(6.63)$$

де ψ_i - коефіцієнт впливу мультиплікативної похибки *i-тої* ланки ВП:

$$\psi_i = \frac{\partial k_П}{\partial k_i} \cdot \frac{k_i}{k_П}.\qquad(6.64)$$

3) Для оцінювання адитивної похибки в рівняння перетворення вводять адитивні похибки окремих ланок. Тоді рівняння перетворення приймає вид:

$$y' = f(x; k_1,...,k_m; \Delta_1,...,\Delta_n),\qquad(6.65)$$

де $\Delta_1,...,\Delta_n$ - адитивна похибка окремих ланок ВП.

4) Рівняння адитивної складової похибки представляють у виді:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta_i,\qquad(6.66)$$

де V_i - коефіцієнт впливу адитивної похибки *i-ої* ланки:

$$V_i = \frac{\partial y'}{\partial \Delta_i} \cdot \frac{1}{y_H},\qquad(6.67)$$

де y_H - нормуюче значення по виходу ВП, рівне

$$y_H = k_П \cdot x_H.\qquad(6.68)$$

5) Вибирають спосіб об'єднання похибок, що входять у рівняння (6.63) і (6.66). Спосіб об'єднання залежить від нормування (представлення) похибок окремих ланок, тобто похибки можуть бути представлені у виді двох складових: систематичної і випадкової, або у виді сумарної похибки, заданої границями інтервалу невизначеності.

6) Сумарну похибку ВП представляють у виді:

$$\delta = \pm\left[\delta_M + \gamma\frac{x_H}{x}\right],\ \% \tag{6.69}$$

або

$$\delta = \pm\left[c + d\left(\frac{x_H}{x} - 1\right)\right],\ \% \tag{6.70}$$

де числа c і d визначаються округленням до найближчого більшого стандартного значення за ГОСТ 8.401-80.

6.2.5.2. Способи оцінювання систематичної і випадкової складової похибки

Якщо похибки розділені на систематичні і випадкові, то формули об'єднання приймають наступний вид :

$$\delta_{MS} = \sum_{i=1}^{m}\psi_i \cdot \delta_{is}, \tag{6.71}$$

$$\gamma_S = \sum_{i=1}^{n}V_i \cdot \Delta_{is}. \tag{6.72}$$

Для систематичних похибок об'єднання проводять з урахуванням знаків систематичних похибок, тобто систематичні похибки можуть складатися (накопичуватися) або відніматися (компенсувати одна одну).

Як характеристики випадкових похибок використовується їх середньоквадратичне відхилення (СКО). Якщо похибки окремих ланок корельовані, то вирази об'єднання приймають вид:

Для мультиплікативних похибок:

$$\sigma[\delta_M] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\psi^2 \cdot \sigma^2[\dot{\delta}_i] + \sum_{i-1}^{m}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{m}\psi_i \cdot \psi_j \cdot \sigma[\dot{\delta}_i]\cdot \sigma[\dot{\delta}_j]\cdot r_{ij}}. \tag{6.73}$$

Для адитивних похибок:

$$\sigma[\dot{\gamma}] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} V_i^2 \cdot \sigma^2\left[\dot{\Delta}_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} V_i \cdot V_j \cdot \sigma\left[\dot{\Delta}_i\right] \cdot \sigma\left[\dot{\Delta}_j\right] \cdot r_{ij}}. \qquad (6.74)$$

де r_{ij} - коефіцієнт кореляції.

При об'єднанні похибок роблять таким чином. Корельовані похибки поєднують по групах, а потім результати об'єднання по групах використовують для об'єднання з іншими незалежними похибками. Тобто підсумкове об'єднання являє собою об'єднання некорельованих похибок. У зв'язку з цим розглядають два часткових випадки для виразів (6.73) і (6.74).

- Перший випадок – похибки некорельовані, тобто $r_{ij} = 0$. Тоді вирази (6.73) і (6.74) приймають вид :

$$\sigma\left[\dot{\delta}_M\right] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \psi_i^2 \cdot \sigma^2\left[\dot{\delta}_i\right]}, \qquad (6.75)$$

$$\sigma[\dot{\gamma}] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} V_i^2 \cdot \sigma^2\left[\dot{\Delta}_i\right]}. \qquad (6.76)$$

- Другий випадок – похибки тісно зв'язані, тобто $r_{ij} = 1$. Тоді вирази (6.73) і (6.74) приймають вид :

$$\sigma\left[\dot{\delta}_M\right] = \pm\left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i \cdot \sigma\left[\dot{\delta}_i\right]\right), \qquad (6.77)$$

$$\sigma[\dot{\gamma}] = \pm\left(\sum_{i=1}^{m} V_i \cdot \sigma\left[\dot{\Delta}_i\right]\right). \qquad (6.78)$$

Тобто корельовані випадкові похибки додаються, як і систематичні, з урахуванням знаків. Незалежні похибки, що входять у вирази (6.75), (6.76) – тільки накопичуються.

Якщо нормування похибки ВП проводять з поділом на систематичну і випадкову складові, то для нормування використовують значення $\delta_{MS}, \sigma[\dot{\delta}_M], \gamma_S, \sigma[\dot{\gamma}]$.

Для більш повної характеристики бажано мати функції щільності імовірності $p(\delta_M), p(\gamma)$, що одержують або за допомогою неперервної згортки, або за допомогою дискретної згортки. Операцію згортки реалізують „звертаючи" розподіли попарно. Неперервну згортку доцільно використовувати, якщо в результаті згортки одержують аналітичний вираз для функції щільності імовірності, тому що згортка реалізується за допомогою операції інтегрування, тобто

$$p_x(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) p_y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(z-y) p_y(y) dy. \qquad (6.79)$$

При наявності декількох розподілів, що звертаються, результат у виді аналітичного виразу одержати неможливо. Для полегшення процедури згортки (з урахуванням того, що похибку знають неточно) формулюють кілька наближених правил:

1) Якщо серед похибок, що додаються, є домінуюча похибка, а іншими можна знехтувати (за критерієм незначної похибки), то розподіл сумарної похибки буде визначатися розподілом домінуючої похибки.

2) Якщо число похибок, що додаються, 5 і більше і немає домінуючих, то розподіл сумарної похибки може бути прийнято нормальним незалежно від розподілів доданків.

Крім цього, необхідно пам'ятати, що нормальний розподіл і Коші відносяться до розряду стійких розподілів, тобто результат згортки двох нормальних розподілів буде також нормальним розподілом.

3) **Сумарну похибку** вимірювального перетворювача представляють у виді

$$\delta = \pm\left[\delta_M + \gamma\frac{x_H}{x}\right], \% \text{ або } \delta = \pm\left[c + d\left(\frac{x_H}{x} - 1\right)\right], \%,$$

де числа **c** **i** **d** визначаються округленням до найближчого більшого стандартного значення за ГОСТ 8.401-80.

6.2.5.3 Оцінювання сумарної похибки ВП у випадку, коли похибки окремих ланок задані у виді границь інтервалу

У цьому випадку вирази для складової сумарної похибки приймають вид відповідно до правил інтервального аналізу з лінеаризацією

$$\delta_M = \sum_{i=1}^{m}\left|\psi_i\delta_i\right|, \tag{6.80}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m}\left|V_i\Delta_i\right|. \tag{6.81}$$

При великій кількості доданків значення δ_M, γ, отримані з виразів (6.80) і (6.81) будуть завищеними. У такій ситуації доцільно представити складові сумарної похибки у виді границь інтервалу з імовірністю, меншою 1. У цьому випадку похибкам окремих ланок приписують рівномірні розподіли, а сумарну похибку вважають розподіленою нормально. Тоді границю довірчого інтервалу для імовірності P=0,95 знаходять за допомогою співвідношень:

$$\delta_M(P = 0{,}95) = 1{,}1\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^2\delta_i^2}, \tag{6.82}$$

$$\gamma(P = 0{,}95) = 1{,}1\sqrt{\sum_{i=1}^{m}V_i^2\Delta_i^2}. \tag{6.83}$$

А для імовірності P=0,99 використовують співвідношення (6.84), (6.85):

$$\delta_M\left(P=0{,}99\right)=1{,}4\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^2\delta_i^2}, \qquad (6.84)$$

$$\gamma\left(P=0{,}99\right)=1{,}4\sqrt{\sum_{i=1}^{m}V_i^2\Delta_i^2}. \qquad (6.85)$$

6.3. Динамічні характеристики вимірювальних перетворювачів (лінійних, аналогових, з зосередженими параметрами)

6.3.1. Основні визначення

За ознакою повноти опису динамічних властивостей динамічні характеристики (ДХ) поділяються на повні і часткові [25].

Повною ДХ називається така, що однозначно визначає зміну інформативного параметра вихідного сигналу ЗВТ при будь-якій зміні в часі інформативного або неінформативного параметра вхідного сигналу або впливової величини.

Для лінійних аналогових ЗВТ із зосередженими параметрами повними характеристиками є:

1) диференціальне рівняння (структура і коефіцієнти);
2) передатна функція;
3) амплітудно-фазова характеристика;
4) сукупність амплітудо-частотної і фазо-частотної характеристик (АЧХ і ФЧХ);
5) імпульсна характеристика;
6) перехідна характеристика.

Частковою ДХ називається така, що являє собою параметр або функцію повної характеристики ЗВТ. Прикладами часткових характеристик служать:

1) час установлення сигналу (показань);

2) ширина смуги пропускання;

3) параметри перехідної характеристики: час наростання, викид, нерівномірність тощо.

Часткова характеристика, на відміну від повної, відображає не всю сукупність динамічних властивостей ЗВТ, тому вона не може бути використана для оцінювання динамічних похибок. Однак вона дозволяє вирішити задачу порівняння ЗВТ і вибору для конкретних вимірювальних цілей.

6.3.2. Повні динамічні характеристики

6.3.2.1. Диференціальне рівняння

Диференціальне рівняння має такий вигляд[26] :

$$a_n\left(\frac{d^{(n)}}{dt}y(t)\right)+a_{n-1}\left(\frac{d^{n-1}}{dt}y(t)\right)+\cdots+a_0y(t)=$$

$$=в_m\left(\frac{d^{(m)}}{dt}x(t)\right)+в_{m-1}\left(\frac{d^{m-1}}{dt}x(t)\right)+\cdots+в_0x(t),$$

де $\left(\frac{d^{(n)}}{dt}y(t)\right)$ – позначення похідної n-ого порядку.

При переході в статичний режим $x=\mathrm{const};\quad y=\mathrm{const}$ одержуємо:

$$a_0y=в_0x \qquad \text{або} \qquad K=\frac{y}{x}=\frac{b_0}{a_0}=S_0,$$

де S_0 – чутливість, K – статичний коефіцієнт перетворення.

Інакше диференціальне рівняння може бути представлене у виді:

$$a'_n\left(\frac{d^{(n)}}{dt}y(t)\right)+a'_{n-1}\left(\frac{d^{(n-1)}}{dt}y(t)\right)+\cdots+y(t)=$$

$$= S_0\left[в'_m\left(\frac{d^{(m)}}{dt}x(t)\right) + в'_{m-1}\left(\frac{d^{(m-1)}}{dt}x(t)\right) + \cdots + x(t)\right],$$

де $a'_n = \dfrac{a_n}{a_0}$; $a'_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{a_0}$; $b'_m = \dfrac{b_m}{b_0}$; $b'_{m-1} = \dfrac{b_{m-1}}{b_0}$; і так далі. Порядок диференціального рівняння визначається числом n. Найбільш часто зустрічаються диференціальні рівняння першого ($n = 1$) і другого ($n = 2$) порядків.

6.3.2.2. Передатна функція

Передатна функція - відношення перетворення Лапласа вихідної величини ЗВТ до перетворення Лапласа вхідної величини при нульових початкових умовах.

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

де $Y(p) = \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt$ – перетворення Лапласа вихідної величини $в(t)$,

$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$ – перетворення Лапласа вхідної величини $x(t)$.

Передатну функцію одержують за допомогою перетворення диференціального рівняння

$$K(p) = \frac{в_m \cdot p^m + в_{m-1}\cdot p^{m-1} + \cdots + в_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1}\cdot p^{n-1} + \cdots + a_0} = S_0 \cdot \frac{в'_m \cdot p^m + в'_{m-1}\cdot p^{m-1} + \cdots + 1}{a'_n \cdot p^n + a_{n-1}\cdot p^{n-1} + \cdots + 1}$$

Для порівняння динамічних властивостей ЗВТ використовують приведену передатну функцію (передатну функцію К(*p)*, віднесену до статичного коефіцієнта перетворення)

$$W(p) = \frac{K(p)}{K} = \frac{Y(p)}{[K \cdot X(p)]}.$$

6.3.2.3. Амплітудно-фазова характеристика

Амплітудно-фазова характеристика (АФХ) ЗВТ $K(j\omega)$ (комплексний коефіцієнт перетворення (передачі)) – динамічна характеристика ЗВТ, що представляє собою залежне від кругової частоти відношення перетворення Фур'є вихідного сигналу ЗВТ до перетворення Фур'є його вхідного сигналу при нульових початкових умовах.

$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$.Зв'язок між передатною функцією й амплітудно-фазовою характеристикою можна представити таким чином

$$K(j\omega) = K(p)\big|_{p=j\omega}.$$

Зустрічається поняття – приведена комплексна частотна характеристика $W(j\omega)$, що дорівнює $W(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{K}$.

6.3.2.4. Сукупність амплітудо - частотної і фазо - частотної характеристик

Амплітудно-фазова характеристика може бути представлена в алгебраїчній формі

$$K(j\omega) = \mathrm{Re}[K(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[K(j\omega)];$$

або в показниковій формі

$$K(j\omega) = K(\mathrm{j}\omega)\exp[j\varphi(\omega)],$$

де $K(\omega)$– **амплітудно-частотна характеристика ЗВТ**, що представляє собою залежність модуля коефіцієнта перетворення від частоти;

$\varphi(\omega)$– **фазо-частотна характеристика ЗВТ**, що представляє собою залежність аргументу коефіцієнта перетворення від частоти.

6.3.2.5. Імпульсна характеристика ЗВТ

Імпульсна характеристика ЗВТ $g(t)$ – часова динамічна характеристика ЗВТ, що представляє собою його відгук на іспитовий сигнал у виді дельта - функції $\delta(t)$.

$$g(t) = y(t),$$

якщо на вхід ЗВТ діє іспитовий сигнал $x(t) = \delta(t)$, то

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & npu\, t = 0 \\ 0 & npu\, t \neq 0 \end{cases},$$

за умови, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.

Імпульсну характеристику можна одержати з представлених вище характеристик.

Наприклад, $g(t) = L^{-1}[K(p)]$, де $L^{-1}[K(p)]$– зворотне перетворення Лапласа.

6.3.2.6. Перехідна характеристика

Перехідна характеристика ЗВТ $h(t)$ – часова динамічна характеристика ЗВТ, що представляє собою його відгук на іспитовий сигнал у виді одиничної східчастої функції.

$$h(t) = \mathrm{y}(t),$$

якщо на вхід ЗВТ подається іспитовий сигнал $x(t) = 1(t)$, то

$$1(t)=\begin{cases}0, & при\ t<0;\\ 1, & при\ t\geq 0.\end{cases}$$

Зв'язок перехідної й імпульсної характеристики можна представити наступними співвідношеннями:

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau\,; \qquad g(t)=\frac{dh(t)}{dt}\,.$$

6.3.3. Нормування динамічних характеристик засобів вимірювальної техніки

У динамічному режимі ДХ ЗВТ використовують для оцінювання динамічної похибки. У цьому випадку необхідно нормувати повні ДХ ЗВТ.

Але динамічні властивості ЗВТ впливають не тільки на динамічну складову похибки вимірювання. У тих випадках, коли ЗВТ комплектують у інформаційно-вимірювальну систему (ІВС), динамічні властивості ЗВТ впливають і на статичну похибку ІВС. У будь-якій ІВС є послідовне з'єднання декількох ЗВТ. Наступні в цьому з'єднанні ЗВТ перетворюють (трансформують) статичні похибки попередніх ЗВТ. Статична похибка ЗВТ у загальному випадку являє собою випадковий процес, тобто характеризується деяким частотним спектром. При нормуванні похибки ця властивість відображається автокореляційною функцією або спектральною щільністю. Отже, перетворення статичної похибки попереднього в системі ЗВТ наступним ЗВТ буде залежати від динамічних властивостей наступного ЗВТ. Для оцінки статичної похибки ІВС необхідно мати можливість визначити вплив динамічних властивостей деякого ЗВТ на перетворення їм статичної похибки (випадкового процесу) іншого ЗВТ, включеного в ІВС перед ним. Для цієї мети повні динамічні характеристики можуть бути використані й у статичному режимі.

Тому в стандартах передбачене нормування таких динамічних характеристик ЗВТ, що дозволяють оцінювати викривлення будь-яких змінних сигналів, що поступають на вхід ЗВТ – досліджуваних при вимірюваннях (динамічна складова похибки вимірювання) і сигналів, еквівалентних статичній похибці ЗВТ, підключених до даного ЗВТ у ІВС (статична похибка ІВС).

Для лінійних ЗВТ такими характеристиками є передатна функція (або амплітудно-фазова характеристика), перехідна, імпульсна і інші характеристики. Усі вони відносяться до групи так званих повних динамічних характеристик, що представляють собою функції, що зв'язують між собою змінний в часі вхідний сигнал і вихідний сигнал, що викликається ним.

Ці характеристики, для лінійних ланок, зв'язані між собою однозначно, тому в кожному конкретному випадку варто нормувати ту з них, що, у даному випадку, зручніше використовувати і яку зручніше експериментально оцінювати (контролювати).

Повні динамічні характеристики лінійних аналогових ЗВТ однозначно зв'язані між собою наступними співвідношеннями:

1) перехідна характеристика з імпульсною

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau;$$

2) імпульсна характеристика з перехідною

$$g(t)=\frac{\partial h(t)}{\partial t};$$

3) амплітудно-фазова характеристика з імпульсною, АЧХ і ФЧХ

$$K(j\omega)=\int_0^\infty g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt;$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)\cdot e^{-j\omega t}d\omega;$$

$$K(j\omega)=K(\omega)\cdot e^{-j\varphi(\omega)};$$

4) передатна функція з імпульсною характеристикою

$$K(p) = \int_0^{\infty} g(t) \cdot e^{-pt} dt \, .$$

При нормуванні динамічних характеристик вказують номінальні динамічні характеристики і найбільші відхилення від них, що допускаються. Нормовані номінальні динамічні характеристики в аналітичному виді виражаються таким чином (як приклад використана ланка 1-го порядку):

1) перехідна характеристика $h_{sf}(t) = K_{sf}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]$;

2) імпульсна характеристика $g_{sf}(t) = \frac{K_{sf}}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$;

3) амплітудно-фазова характеристика $K_{sf}(j\omega) = \frac{K_{sf}}{1 + j\omega T}$;

4) передатна функція $K_{sf}(p) = \frac{K_{sf}}{1 + pT}$;

5) амплітудно-частотна характеристика $K_{sf}(\omega) = \frac{K_{sf}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$;

6) фазо-частотна характеристика $\varphi_{sf}(\omega) = -\mathrm{arctg}\ \omega T$;

де *T*- номінальна постійна часу; K_{sf} - номінальний статичний коефіцієнт перетворення.

На графіках рис. 6.6 (а, б) приведені номінальні динамічні характеристики з найбільшими відхиленнями від них, що допускаються.

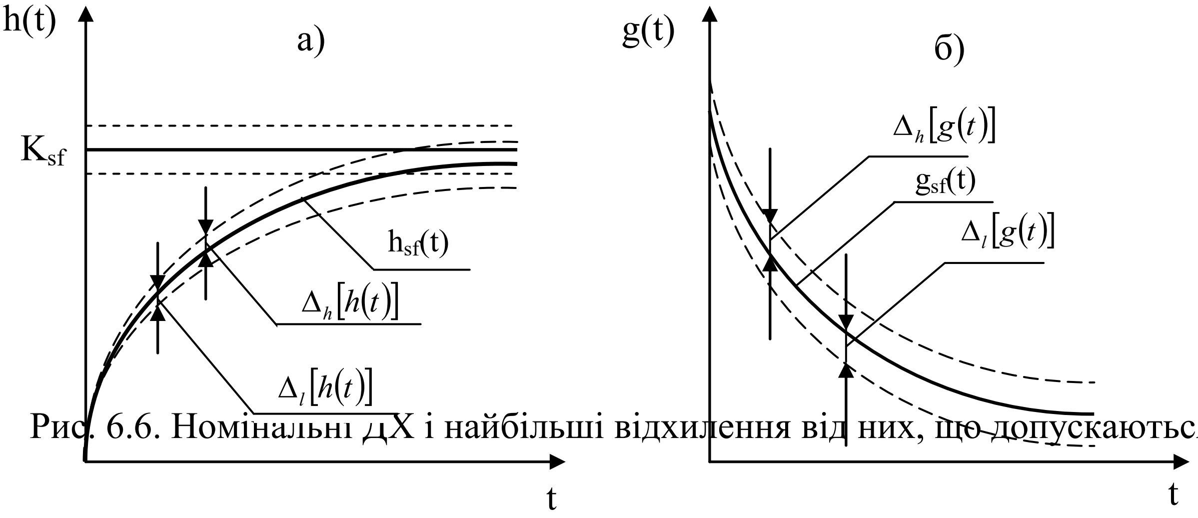


Рис. 6.6. Номінальні ДХ і найбільші відхилення від них, що допускаються

6.3.4. Способи експериментального визначення динамічних характеристик засобів вимірювальної техніки

З погляду експериментального визначення, найбільш зручними ДХ є перехідна й амплітудно-частотна характеристики. Справді, при подачі на вхід ЗВТ іспитового східчастого сигналу одиничного розміру можна за допомогою прямих вимірювань вихідного сигналу одержати відліки (або запис) перехідної характеристики. Амплітудно-частотна характеристика також може бути отримана за допомогою прямих вимірювань амплітуди вихідних гармонійних сигналів при дії на вході гармонійних сигналів необхідної частоти й одиничної амплітуди [26].

Однак тут виникають труднощі, пов'язані з обмеженими можливостями точного відтворення форми сигналів тих або інших вимірюваних величин. Наприклад, важко відтворити гармонійну зміну температури, концентрації компонентів складних речовин, вологості, розходу й інших вимірюваних величин. З іншого боку, стрибкоподібну зміну таких величин, як, наприклад, швидкості, прискорення й інших, відтворити важче, ніж гармонійну.

Усі перераховані обставини варто враховувати при виборі тієї або іншої динамічної характеристики для нормування. Нормувати рекомендується таку характеристику, що може бути експериментально визначена за допомогою найбільш простих методів вимірювання.

У таблиці 6.1 приведена систематизація способів експериментального визначення ДХ ЗВТ.

Таблиця 6.1 - Способи визначення повних динамічних характеристик

Найменування характеристики	Спосіб визначення	Іспитовий вхідний сигнал ЗВТ для безпосереднього вимірювання
1. Перехідна характеристика	Безпосереднє вимірювання	Східчастий вхідний сигнал
2. Амплітудно частотна характеристика	Безпосереднє вимірювання. Є повною динамічною характеристикою тільки для мінімально фазових ЗВТ	Синусоїдальний вхідний сигнал
3. Амплітудно-фазова характеристика	Безпосереднє вимірювання з використанням приладів для вимірювання амплітуди і фази синусоїдальних сигналів	Синусоїдальний вхідний сигнал
	Обчислення за іншими безпосередньо виміряними повними динамічними характеристиками	
4. Імпульсна характеристика	Безпосереднє вимірювання при поданні на вхід імпульсного сигналу достатньо малої тривалості	Імпульсний сигнал досить малої тривалості
	Безпосереднє вимірювання як взаємо-кореляційної функції вхідного і вихідного сигналів	Псевдовипадковий двох- або трьохрівневий сигнал
	Обчислення за іншими безпосередньо вимірюваними повними динамічними характеристиками	
5. Передатна функція	Обчислення за іншими безпосередньо вимірюваними повними динамічними характеристиками	

6.3.5. Приклади оцінювання динамічних характеристик вимірювальних перетворювачів

6.3.5.1. Динамічні характеристики аперіодичного перетворювача першого порядку

А) Диференціальне рівняння перетворювача

Схема перетворювача приведена на рис. 6.7.

Формально диференціальне рівняння перетворювача першого порядку можна представити у виді:

$$a_1' \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = S_0 x(t), \tag{6.86}$$

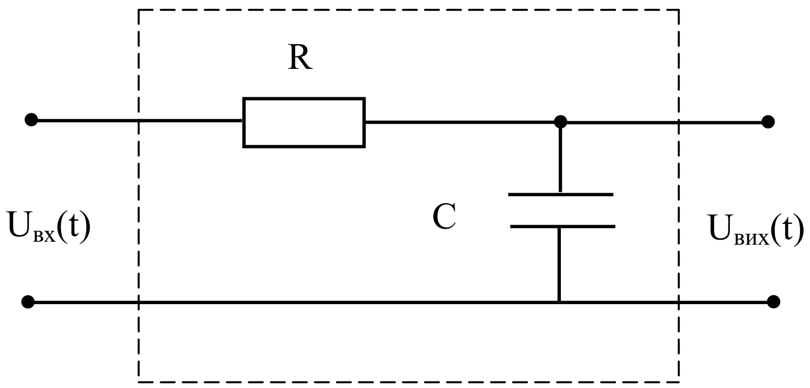


Рис. 6.7 - Схема перетворювача

Для перетворювача рис. 6.7

$$u_{вх}(t) = u_{вих}(t) + i(t) \cdot R, \tag{6.87}$$

звідки

$$i(t) = \frac{-u_{вих}(t) + u_{вх}(t)}{R}. \tag{6.88}$$

Виключаємо проміжну змінну $i(t)$, підставляючи (6.88) у приведене нижче співвідношення

$$u_{вих}(t)=\frac{1}{C}\int idt=\frac{1}{RC}\int\left[-u_{вих}(t)+u_{вх}(t)\right]dt. \qquad (6.89)$$

Візьмемо похідну лівої і правої частини рівняння (6.89)

$$\frac{du_{вих}(t)}{dt}=\frac{1}{RC}\left[-u_{вих}(t)+u_{вх}(t)\right].$$

Звідки одержуємо диференціальне рівняння у виді:

$$RC\frac{du_{вих}(t)}{dt}+u_{вих}(t)=u_{вх}(t). \qquad (6.90)$$

Порівнюючи (6.86) і (6.90), одержуємо $a_1^{'}=RC=\tau$, де τ - постійна часу перетворювача; $S_0=1$.

Представляємо **диференціальне рівняння** перетворювача в остаточному виді

$$\tau\frac{du_{вих}(t)}{dt}+u_{вих}(t)=u_{вх}(t).$$

Б) Передатна функція перетворювача

Операторне зображення диференціального рівняння має вигляд:

$$(\tau p+1)U_{вих}(p)=U_{вх}(p).$$

Звідки **передатна функція** перетворювача дорівнює

$$K(p)=\frac{U_{вих}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{1}{(\tau p+1)}.$$

В) Амплітудо - фазова характеристика

Амплітудо - фазова характеристика має вигляд

$$K(j\omega)=\frac{1}{(j\omega\tau+1)}.$$

Г) Сукупність амплітудно-частотної і фазочастотної характеристик

Амплітудо - частотну характеристику одержуємо за допомогою наступних перетворень:

$$K(j\omega)=\frac{1\cdot(1-j\omega\tau)}{(j\omega\tau+1)(1-j\omega\tau)}=\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}-j\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}.$$

Тоді

$$K(\omega)=\sqrt{\frac{1}{\left(1+\omega^2\tau^2\right)^2}+\frac{(\omega\tau)^2}{\left(1+\omega^2\tau^2\right)^2}}.$$

Після перетворень отримуємо

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}.$$

Графік АЧХ приведений на рис. 6.8.

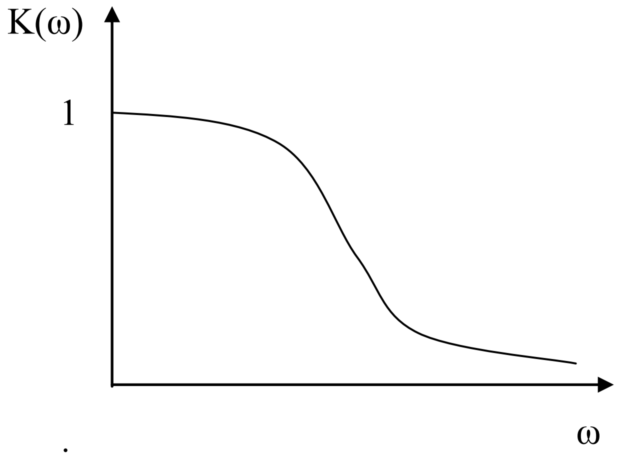


Рис. 6.8 - Амплітудно-частотна характеристика аперіодичного перетворювача

Фазо - частотну характеристику одержуємо в наступному виді:

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}(\omega\tau).$$

Графік ФЧХ приведений на рис. 6.9.

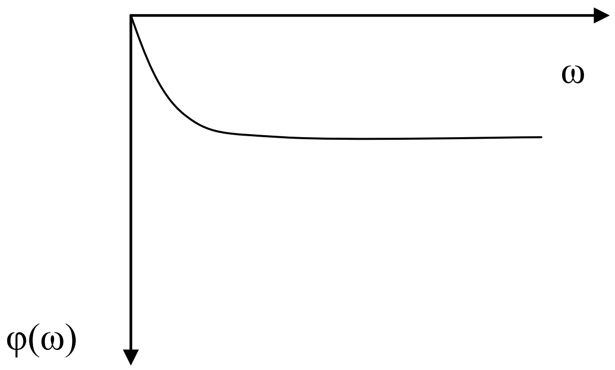


Рис. 6.9 - Фазо - частотна характеристика аперіодичного перетворювача

Д) Імпульсна характеристика перетворювача

Імпульсну характеристику одержуємо з виразу для К(р)

$$K(p)=\frac{1}{\tau\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Використовуючи таблицю зворотного перетворення Лапласа

$$L^{-1}\left[(p+\alpha)^{-1}\right]=e^{-\alpha t}$$

одержимо:

$$g(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Графік $g(t)$ приведений на рис. 6.10.

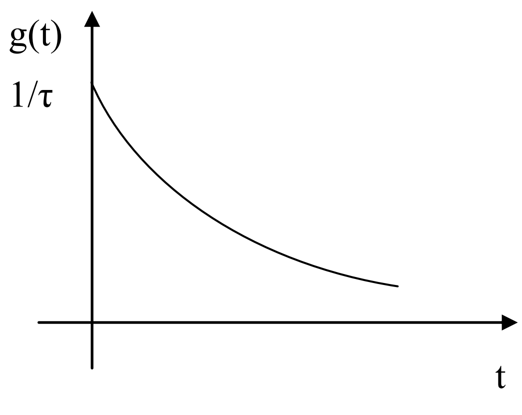


Рис. 6.10 - Імпульсна характеристика аперіодичного перетворювача

Е) Перехідна характеристика

Перехідну характеристику одержуємо зі співвідношення

$$h(t)=\int_0^t g(u)du=\int_0^t \frac{1}{\tau}e^{-\frac{u}{\tau}}du=-e^{-u}\Big|_0^{\frac{t}{\tau}}=1-e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Остаточно $h(t)=1-e^{-\frac{t}{\tau}}$. Графік $h(t)$ приведений на рис. 6.11.

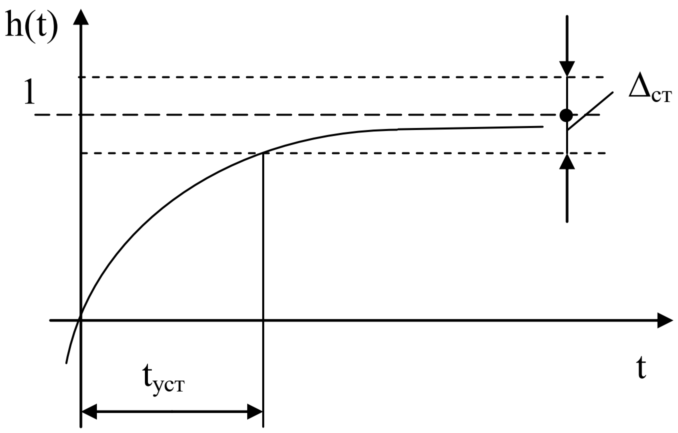


Рис. 6.11 - Перехідна характеристика аперіодичного перетворювача

Ж) Час установлення

Знайдемо часткову динамічну характеристику – **час установлення** $t_{УСТ}$ перехідної характеристики $h(t)$ ЗВТ. Час установлення - це час, після проходження якого відхилення перехідної характеристики від сталого значення не перевищують заданого значення $\Delta_{ст}$.

Для визначення $t_{УСТ}$ потрібно розв'язати рівняння

$$\Delta_{ст}=h(t)-1=e^{-\frac{t_{уст}}{\tau}};$$

$$ln\,\Delta_{ст}=-\frac{t_{уст}}{\tau}; \qquad t_{уст}=\tau\, ln\frac{1}{\Delta_{ст}}$$

Якщо $\Delta_{ст} = 0{,}1$ (що еквівалентно відносній статичній похибці $\delta_{ст} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1 = 10$ %), $\tau = 1$ с, то час установлення дорівнює $t_{УСТ} = 2{,}3$ с. Якщо $\Delta_{ст} = 0{,}01$ (це еквівалентно $\delta_{ст} = 1$ %) , то $t_{УСТ} = 4{,}6$ с.

6.3.6. Динамічні характеристики перетворювача другого порядку

6.3.6.1. Диференціальне рівняння

Нехай загальний вид диференціального рівняння перетворювача другого порядку визначається виразом:

$$a_2\left(\frac{d^{(2)}y(t)}{dt}\right) + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = в_0 x(t) \tag{6.91}$$

Якщо як конкретний приклад використовувати магнітоелектричний перетворювач, то вхідний і вихідний сигнал і коефіцієнти диференціального рівняння здобувають конкретний фізичний зміст: $y(t) = \alpha(t)$, де α – кут повороту рухливої частини рухливої котушки перетворювача; $x(t) = i(t)$, де $i(t)$ – струм, що протікає по котушці, $a_2 = I$, де I – момент інерції рухливої частини, $a_1 = P_1$, де P – коефіцієнт заспокоєння, $a_0 = W$, де W – питомий протидіючий момент, $в_0 = B \cdot s \cdot \mathrm{w}$, де B – індукція в повітряному зазорі, s – площа котушки, w – число витків котушки.

Тоді рівняння (6.91) приймає наступний вид:

$$I\left(\frac{d^{(2)}\alpha(t)}{dt}\right)+P_1\frac{d\alpha(t)}{dt}+W\alpha(t)=Bswi(t). \qquad (6.92)$$

Якщо праву і ліву частину рівняння (6.92) розділити на I і ввести часткові динамічні характеристики: частоту власних коливань рухливої частини $w_0=\sqrt{\frac{W}{I}}$ і ступінь заспокоєння $\beta=\frac{P_1}{\left(2\sqrt{WI}\right)}$, то диференціальне рівняння перетворювача можна представити в остаточному виді

$$\left(\frac{d^2\alpha(t)}{dt}\right)+2\beta\omega_0\frac{d\alpha(t)}{dt}+\omega_0^2\alpha(t)=\frac{Bsw}{I}I(p).$$

6.3.6.2. Передатна функція

Операторне зображення диференціального рівняння має вигляд:

$$p^2+2\beta\omega_0 p+\omega_0^2\alpha(t)=\frac{Bsw}{I}I(p).$$

Звідси передатна функція має вигляд

$$K(p)=\frac{\alpha(p)}{I(p)}=\frac{Bsw}{I}\cdot\frac{1}{p^2+2\beta\omega_0 p+\omega_0^2}.$$

6.3.6.3. Амплітудно-фазова характеристика

Амплітудно-фазова характеристика, як залежність від ω, має вигляд:

$$K(j\omega)=\frac{Bsw}{I}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+j2\omega_0\omega\beta}.$$

Для перетворювачів другого порядку зручно представляти амплітудно-фазову характеристику як функцію відносної частоти $\eta=\frac{\omega}{\omega_0}$. У цьому випадку амплітудно-фазова характеристика приймає вид:

$$K(j\eta)=\frac{Bsw}{W}\cdot\frac{1}{1-\eta^2+j2\beta\eta}=S_0\cdot\frac{1}{1-\eta^2+j2\beta\eta}.$$

Тоді АЧХ і ФЧХ визначаються таким чином:

$$K(j\eta)=S_0\cdot\frac{1-\eta^2-j2\beta\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\beta^2\eta^2};$$

$$K(\eta)=S_0\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\beta^2\eta^2}};$$

$$\varphi(\eta)=-\mathrm{arctg}\frac{2\beta\eta}{1-\eta^2}.$$

Графік залежності $K(\eta)$ показаний на рис. 6.12. З формули і рисунка видно, що ступінь заспокоєння β істотно впливає на динамічні властивості механізму. На рисунку показані три залежності $K(\eta)$: перша крива для $\beta<0{,}5$; друга – для $\beta>0{,}5$; третя – для $\beta=0{,}5$.

При $\eta=1$ (тобто $\omega=\omega_0$) $K(\eta)=\frac{1}{(2\beta)}$. Тоді для частот поблизу ω_0, $K(\eta)>1$, якщо $\beta<0{,}5$, тобто амплітуда коливань на виході більше амплітуди коливань на вході. Таким чином, у цій області виявляються резонансні властивості механізму.

При $\beta>0{,}5$ (або $\beta=0{,}5$) функція $K(\eta)$ для $\eta>1$ убуває рівномірно з більшою або меншою швидкістю.

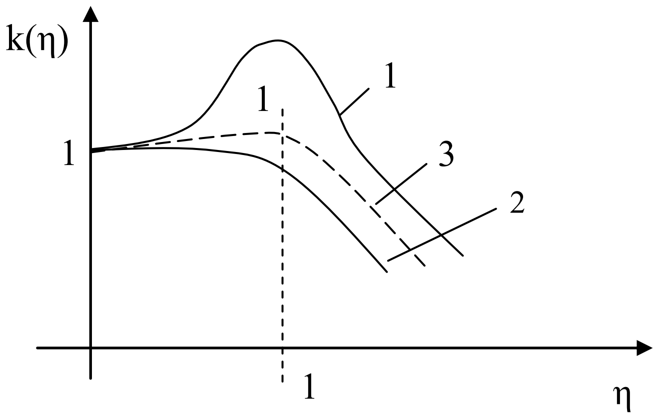


Рис. 6.12 - АЧХ перетворювача другого порядку

Від значень коефіцієнта заспокоєння залежить і перехідна характеристика, коли на вхід подається одиничний скачок (рис. 6.12).

6.3.6.4. Вплив ступеня заспокоєння на характер руху рухливої частини магнітоелектричного перетворювача

На рис. 6.13 показаний характер руху рухливої частини механізму для трьох значень β: перша крива при $\beta < 1$; друга - для $\beta > 1$ і третя відповідає $\beta = 1$. З рисунка видно, що при $\beta < 1$ рухлива частина робить коливальний рух. Зі зменшуваною амплітудою вона підходить до сталого значення. Для $\beta > 1$ (або $\beta = 1$) покажчик приладу підходить до сталого значення $\alpha_{уст}$ ліворуч, не переходячи цього значення. Кожен режим одержав свою назву. При $\beta < 1 -$ режим називається періодичним, при $\beta = 1 -$ критичним, а при $\beta > 1 -$ аперіодичним. Слід зазначити, що мінімальний час установлення відповідає критичному режимові руху рухливої частини.

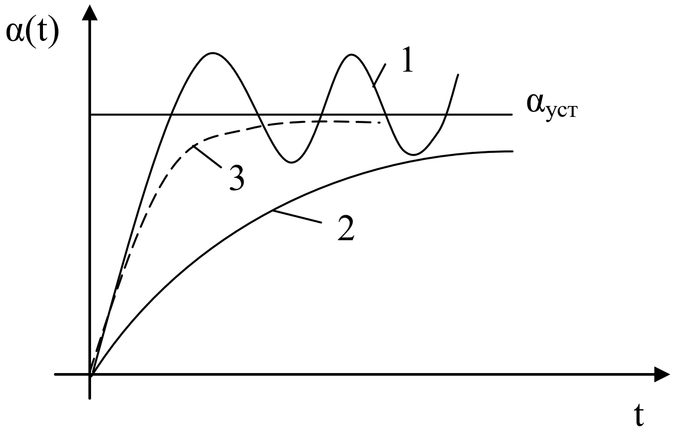


Рис. 6.13. Ілюстрація руху рухливої частини перетворювача до сталого положення $\alpha_{уст}$ при різних значеннях ступеня заспокоєння.

6.4. Використання динамічних характеристик для визначення інформативних параметрів детермінованого сигналу на виході вимірювального перетворювача

6.4.1. Загальні положення

Детермінований сигнал може бути заданий в аналітичній формі як функція часу *x(t)*, або представлений графіком, таблицею, осцилограмою. Лінійні перетворювачі, як правило, містять інерційні елементи. Аналіз проходження сигналів через лінійні перетворювачі складається з дослідження виникаючих у цих перетворювачах перехідних процесів, у результаті яких відбувається перекручування параметрів сигналів. При дослідженні проходження сигналів через лінійні перетворювачі застосовують принцип суперпозиції, відповідно до якого представляють вхідний сигнал складної форми у виді суми елементарних впливів і визначають відгук (реакцію) перетворювача на кожен елементарний вплив. Додавши ці відгуки, знаходимо вихідний сигнал. У залежності від виду вхідного сигналу і характеристик перетворювача застосовують розкладання сигналів за різними системами базисних функцій. Найбільше поширення для безперервних сигналів знайшли два способи розкладання [27]:

1) за тригонометричним (або експонентним) базисом; такий спосіб лежить в основі спектрального методу аналізу;

2) за δ - функціями; цим способом користуються при часовому методі аналізу.

6.4.2. Методи аналізу лінійних перетворювачів

Вибір найбільш зручного методу аналізу залежить від структури перетворювача, виду сигналу, що впливає на нього, а також від того, у якій формі (частотній або часовій) повинний бути представлений вихідний сигнал. Наприклад, аналіз проходження відносно простих сигналів (імпульсів включення, гармонійних коливань тощо) через перетворювачі, що описуються лінійними диференціальними рівняннями не вище другого порядку, досить просто виконується класичними методами диференціальних рівнянь. У тих випадках, коли розв'язання диференціальних рівнянь ускладнюється (вплив складних сигналів на перетворювачі зі складною структурою), доцільно використовувати такі методи, як спектральний (операторний) або метод інтеграла накладання, засновані на принципі суперпозиції (рис. 6.14) [26].

При аналізі проходження через вузькополосні перетворювачі, крім перерахованих методів аналізу, що дають точне розв'язання, застосовуються наближені методи, що дозволяють для ряду задач одержати розв'язки, досить близькі до точного. На рис. 6.14 схематично представлена класифікація методів аналізу, що докладно розглядається в .

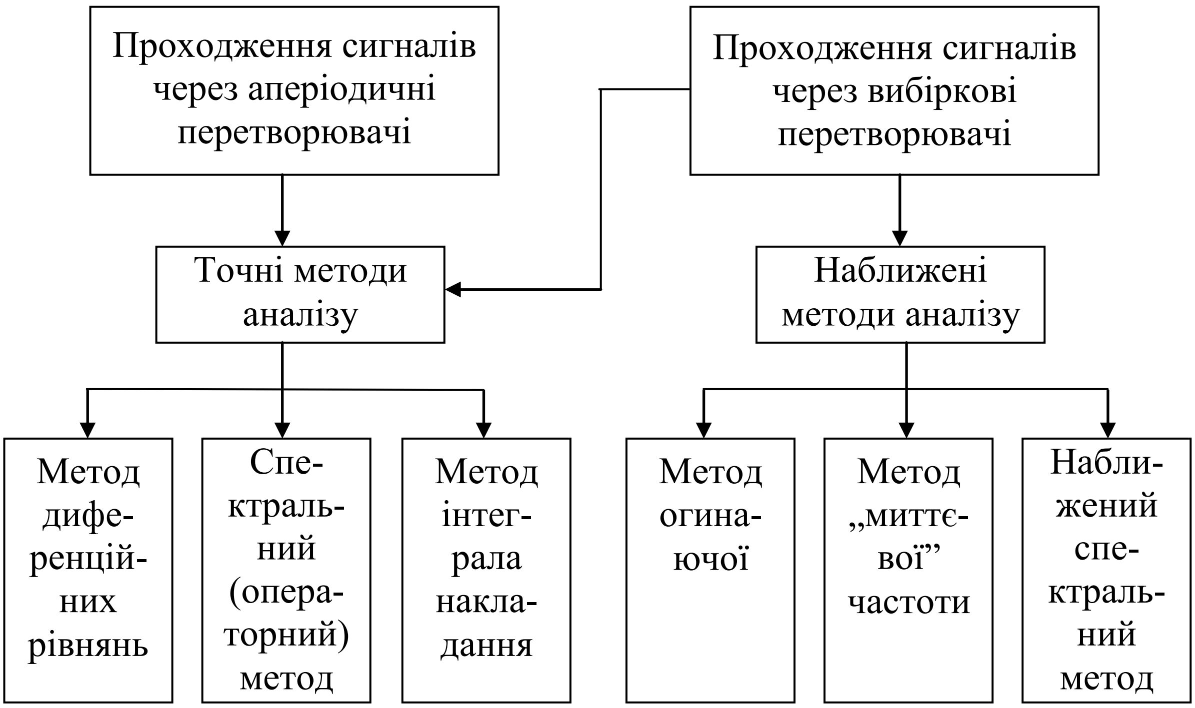


Рис. 6.14 - Класифікація методів аналізу лінійних перетворювачів

Нижче приводиться короткий виклад спектрального (операторного) методу і методу інтеграла накладання.

6.4.2.1. Спектральний (операторний) метод

Даний метод заснований на спектральному представленні сигналу і використанні амплітудно-фазової характеристики перетворювача $\dot{K}(\omega)$ [27].

Нехай на вхід лінійного перетворювача з заданою амплітудно-фазовою характеристикою $\dot{K}(\omega)$ впливає детермінований сигнал $x(t)$, спектральна щільність якого $\dot{S}_X(\omega)$:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_X(\omega)e^{j\omega t}d\omega . \qquad (6.93)$$

Відповідно до спектрального методу аналізу спектральна щільність $\dot{S}_Y(\omega)$ сигналу $y(t)$ на виході перетворювача дорівнює добуткові спектральної щільності вхідного сигналу $\dot{S}_X(\omega)$ на амплітудно-фазову характеристику перетворювача, тобто

$$\dot{S}_Y(\omega) = \dot{S}_X(\omega) \cdot \dot{K}(\omega). \tag{6.94}$$

Застосовуючи до (6.94) зворотне перетворення Фур'є, визначають вихідний сигнал перетворювача, як функцію часу

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_X(\omega) \cdot \dot{K}(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \tag{6.95}$$

Для ряду задач зручніше використовувати операторний метод. У цьому випадку використовують вираз

$$Y(p) = X(p) \cdot K(p), \tag{6.96}$$

де $X(p)$ і $Y(p)$ – зображення сигналів $x(t)$ і $y(t)$ відповідно, а $K(p)$ - передатна функція.

Вихідний сигнал $y(t)$ визначається формулою зворотного перетворення Лапласа.

6.4.2.2. Метод інтеграла накладання

Цей метод заснований на часовому представленні сигналів і використанні динамічних характеристик перетворювачів у часовій області.

Нехай на вході лінійного перетворювача діє сигнал, що описується безперервною функцією часу $x(t)$ (не має розривів вище першого роду). Для знаходження реакції перетворювача $y(t)$ при заданій імпульсній характеристиці перетворювача $g(t)$ використовують вираз

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau)\, d\tau . \tag{6.97}$$

Таким чином, сигнал $y(t)$ на виході лінійного перетворювача є згорткою вхідного сигналу $x(t)$ з імпульсною характеристикою перетворювача $g(t)$. Формулу (7.96) можна записати інакше:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t\text{-}\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau. \tag{6.98}$$

6.4.2.3. Систематизація методів аналізу перетворювачів за динамічними характеристиками, що використовуються

На рис. 6.15 схематично представлені зв'язки між розглянутими методами аналізу, динамічними характеристиками перетворювача, що використовуються при цьому і сигналами $x(t)$ і $y(t)$. На рисунку приведені позначення: $F[\bullet]$ і $F^{-1}[\bullet]$ – пряме і зворотне перетворення Фур'є відповідно, $L[\bullet]$ і $L^{-1}[\bullet]$ – пряме і зворотне перетворення Лапласа відповідно.

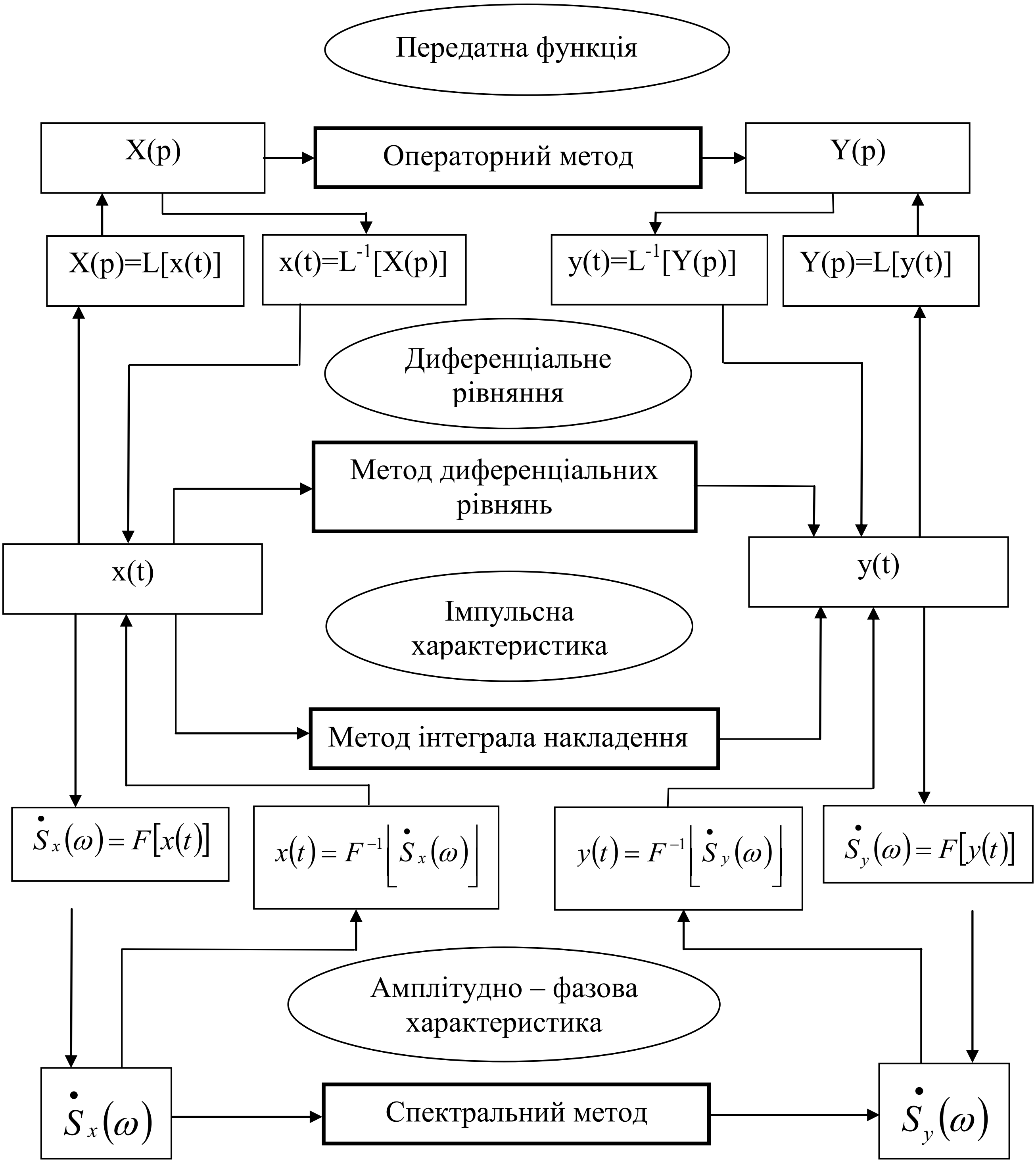


Рис. 6.15 - Зв'язки між методами аналізу, динамічними характеристиками перетворювача і сигналами $y(t)$ і $x(t)$.

6.4.3. Приклади розв'язання задач

Задача 1

Умова задачі

На вході аперіодичного перетворювача з амплітудно-фазовою характеристикою

$$K(j\omega)=\frac{100}{1+j\omega\tau},$$

діє полігармонійний сигнал виду

$$x(t)=\frac{U_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}\cdot\cos(n\omega_0 t+\varphi_n).$$

Знайти вирази:

1) для вихідного сигналу $y(t)$;
2) потужності сигналу на виході перетворювача.

Розв'язання

Для оцінювання параметрів вихідного сигналу використовується амплітудно-фазова характеристика:

$$K(j\omega)=K(\omega)\exp(j\varphi(\omega)).$$

Вихідний сигнал перетворювача:

$$y(t)=\frac{U_0}{2}K(\omega=0)+\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}\cdot K(\omega=n\omega_0)\cdot\cos\left[n\omega_0 t+\varphi_n+\varphi(n\omega_0)\right].$$

Знайдемо вирази для АЧХ і ФЧХ перетворювача.

$$K(\omega)=\frac{100}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}};\qquad \varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}(\omega\tau).$$

Тоді: $$y(t)=50U_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{mn}\cdot 100}{\sqrt{1+(n\omega_0 t)^2}}\cos[n\omega_0 t+\varphi_n-\mathrm{arctg}(n\omega_0\tau)].$$

Відповідно до формули Парсеваля потужність полігармонійного сигналу

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_K^2 P_K \ ,$$

де C_K - амплітуда *k-ої* гармоніки; P_K - коефіцієнт, що залежить від базисної функції.

Для синусоїдальної базисної функції $P_K = \frac{1}{2}$. Тоді потужність вхідного сигналу:

$$P_{BX} = \frac{U_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{mn}^2}{2} .$$

Потужність вихідного сигналу дорівнює

$$P_{BИX} = \frac{U_0^2}{4} K^2(\omega = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^2 \cdot \frac{1}{2} K^2(\omega = n\omega_0) =$$
$$= 2500 \cdot U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{mn}^2 \cdot 5000}{1 + (n\omega_0\tau)^2}$$

Задача 2

Умова задачі

На вхід аперіодичного перетворювача з амплітудно-фазовою характеристикою

$$K(j\omega) = \frac{100}{1 + j\omega\tau}$$

діє неперіодичний сигнал виду $U_{BX}(t) = U \cdot e^{dt}, \quad t \geq 0$.

Знайти:

1) вираз для вихідного сигналу перетворювача в часовій і частотній областях;

2) енергію вихідного сигналу перетворювача.

Розв’язання

- Розв’язання задачі в частотній області (спектральний метод)

При розв’язанні задачі в частотній області використовується амплітудно-фазова характеристика. Тоді спектральна функція на виході перетворювача

$$\dot{S}_{ВИХ}(\omega)=\dot{S}_{ВХ}(\omega)\cdot K(j\omega),$$

де $\dot{S}_{ВХ}(\omega)$– спектральна функція на вході перетворювача

$$\dot{S}_{ВХ}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\dot{S}_{ВХ}(\omega)=\int_{0}^{\infty}U\cdot e^{-\alpha t}dt=\int_{0}^{\infty}U\cdot e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=\frac{U}{\alpha+j\omega}$$

$$\dot{S}_{ВХ}(\omega)=\frac{U}{(\alpha+j\omega)}\cdot\frac{100}{(1+j\omega\tau)}.$$

- Розв’язання **задачі в часовій області (метод інтеграла накладання)**

В часовій області для розв’язання задачі можна використовувати імпульсну характеристику перетворювача, тоді вихідний сигнал визначається наступним виразом:

$$U_{ВИХ}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}U_{ВХ}(u)\cdot g(t-u)du=\int_{-\infty}^{\infty}U_{ВХ}(t-u)\cdot g(u)du.$$

Імпульсну характеристику визначаємо за формулою:

$$K(p)=K(j\omega)|_{j\omega=p}=\frac{100}{\tau\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}.$$

$$g(t)=L^{-1}[K(p)];\qquad g(t)=\frac{100}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$U_{ВИХ}=\int_{0}^{t}U\cdot e^{-\alpha(t-u)}\cdot\frac{100}{\tau}e^{-\frac{u}{\tau}}du=\frac{100U}{\tau}e^{-\alpha t}\int_{0}^{t}e^{u\left(\alpha-\frac{1}{\tau}\right)}du=$$

$$= \frac{100}{\tau} e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\tau}} e^{u\left(\alpha - \frac{1}{\tau}\right)} \Big|_0^t = \frac{100U}{1-\alpha\tau} \cdot \left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

- Розв’язання **задачі операторним методом**

Для розв’язання задачі операторним методом використовується вираз

$$U_{ВИХ}(p) = U_{ВХ}(p) \cdot K(p).$$

Передатну характеристику $K(p)$ одержуємо з амплітудно-фазової характеристики

$$K(p) = K(j\omega)\big|_{j\omega = p}.$$

Таким чином $$K(p) = \frac{100}{1 + p\tau}.$$

Зображення вхідного сигналу $U_{ВХ}(p)$ має вигляд

$$U_{ВХ}(p) = L[u_{ВХ}(t)] = L[U \cdot e^{-\alpha t}] = \frac{U}{p + \alpha}.$$

Зображення вихідного сигналу має вигляд

$$U_{ВИХ}(p) = \frac{U}{(p+\alpha)} \cdot \frac{100}{(1 + p\tau)}.$$

Для переходу в часову область скористаємося зворотним перетворенням Лапласа: $u_{ВИХ}(t) = L^{-1}[U_{ВИХ}(p)]$.

Відповідно до таблиць зворотного перетворення Лапласа (С. 2.2):

$$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)} \Rightarrow \frac{1}{\beta - \alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right),$$

одержуємо

$$u_{ВЫХ}(t) = \frac{100U}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau - \alpha}} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{100U}{1 - \tau\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Знаходження енергії вихідного сигналу

Розв’яжемо задачу в частотній області.

$$Э_{ВИХ}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_{ВИХ}^2(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_{ВХ}^2(\omega)K^2(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{U^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)} \cdot \frac{100^2}{\left(1+\omega^2\tau^2\right)} \cdot d\omega = \frac{(100U)^2}{\pi\tau^2}\int_0^\infty \frac{1}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)}d\omega$$

$$S_{ВХ}^2(\omega) = \dot{S}_{ВХ}(\omega)\cdot \dot{S}^*{}_{ВХ}(\omega); \qquad K^2(\omega) = K(j\omega)\cdot K^*(j\omega),$$

де $K(j\omega)$ і $K^*(j\omega)$ – комплексно сполучені числа.

З урахуванням табличного інтеграла (С. 3.1)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)};$$

$$Э_{ВИХ}(\omega) = \frac{100U^2}{\pi\tau^2}\cdot\frac{\pi}{2\alpha\cdot\frac{1}{\tau}\left(\alpha+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{5000U^2}{\alpha\tau\left(\alpha+\frac{1}{\tau}\right)}$$

Задача 3

Умова задачі

На вхід фільтра з частотною характеристикою (рис. 7.16) надходить неперіодичний сигнал $x(t) = Ue^{-\alpha t}$, $t \ge 0$.

Знайти:

1) спектр сигналу на виході фільтра;

2) АКФ сигналу на вході і виході фільтра;

3) енергію сигналу на вході і виході фільтра.

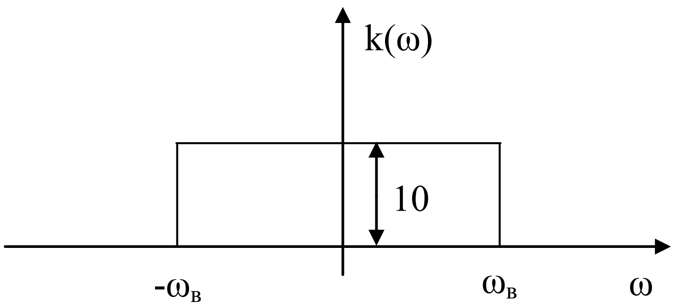


Рис. 7.16 - Амплітудно-частотна характеристика фільтра

Розв'язання

Спектральна функція сигналу на вході фільтра визначається виразом

$$\dot{S}_{BX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{U}{\alpha+j\omega};$$

$$\dot{S}_{ВИХ}(\omega)=\dot{S}_{BX}(\omega)\cdot K(\omega);$$

$$K(\omega)=\begin{cases}10, & при -\omega_В\le\omega\le\omega_B\\ 0, & при\ |\omega|\ge\omega_B\end{cases}.$$

Вираз для спектральної функції вхідного сигналу має вигляд:

$$\dot{S}_{вих}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{10U}{\alpha+j\omega}, & при -\omega_В\le\omega\le\omega_B\\ 0, & при\ |\omega|\ge\omega_B\end{cases}$$

Автокореляційна функція на вході фільтра дорівнює:

$$R_{ВИХ}(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S^2(\omega)\cos(\omega\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{U^2}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega\tau)d\tau$$

З використанням табличного інтеграла (С. 3.2)

$$\int_0^{\infty}\left(x^2+a^2\right)^{-1}\cos(xy)dx=\frac{1}{2}\pi a^{-1}e^{-ay}$$

одержуємо

$$R_{BX}(\tau)=\frac{U^2}{2\alpha}e^{-\alpha t}, \qquad R_{BИX}(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_B}\frac{U^2\cdot 10^2}{\alpha^2+\omega^2}\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau .$$

Енергія на вході фільтра дорівнює $E_{BX}=R_{BX}(\tau=0)=\dfrac{U^2}{2\alpha}$

Енергія на виході фільтра дорівнює

$$E_{BИX}=R_{BИX}(\tau=0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_B}\frac{U^2\cdot 10^2}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega .$$

З використанням табличного інтеграла (С. 3.3) $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}(x)$

одержуємо
$$E_{BИX}=\frac{U^2\cdot 10^2}{\pi\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_B}{\alpha}\right).$$

Висновок: **У даному підрозділі приведені короткі теоретичні положення по використанню динамічних характеристик для оцінювання інформативних параметрів детермінованого сигналу на виході вимірювального перетворювача і приклади розв'язання задач з використанням динамічних характеристик у часовій і частотній областях.**

6.5. Використання динамічних характеристик для оцінювання спектрально-кореляційних характеристик випадкового сигналу на виході вимірювального перетворювача

6.5.1. Загальні положення

Вичерпний розв'язок питання про проходження випадкового сигналу через лінійний перетворювач у загальному випадку вимагає відшукання багатомірних розподілів вихідного сигналу, що представляє складну задачу. Вона істотно спрощується, якщо обмежитися розрахунком характеристик, необхідних у рамках кореляційної теорії, і розглядати тільки сталі процеси. При цьому, параметри лінійного перетворювача приймають постійними в часі [27].

Звичайне перетворення Фур'є встановлює зв'язок між часовим представленням сигналу і його частотним спектром. Усереднені характеристики часових і частотних властивостей випадкового сигналу, тобто автокореляційна функція і спектральна щільність потужності, також взаємозалежні. Існує формула, названа іменами вчених Н. Вінера й А.Я. Хінчина, незалежно один від одного отримавших її. Відповідно до цієї формули, спектральна щільність потужності $G(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу з нульовим математичним чеканням і його автокореляційна функція $R(\tau)$, зв'язані прямим і зворотним перетворенням Фур'є.

При доказі формули комплексну спектральну щільність $\dot{S}_i(\omega)_T$ часової реалізації $x_i(t)_T$ тривалістю T множать на сполучену функцію $\dot{S}_i(-\omega)_T$ і переходять до спектральної характеристики енергії процесу

$$E_i(\omega)_T = \dot{S}_i(\omega)_T \cdot \dot{S}_i(-\omega)_T\,, \tag{6.99}$$

де мається на увазі існування звичайного зв'язку між реалізаціями і їхніми спектрами Фур'є

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_i(\omega)_T \cdot e^{j\omega t} d\omega = x_i(t), \tag{6.100}$$

$$\dot{S}_i(\omega)_T = \int x_i(t)_T \cdot e^{-j\omega t} dt \tag{6.101}$$

$$x_i(t)_T = x_i(-t)_T; \qquad \dot{S}_i(-\omega)_T = \dot{S}_i^*(\omega)_T \tag{6.102}$$

У формулі (6.102) приведені варіанти позначень функції, комплексно сполученої з $\dot{S}_i(\omega)_T$.

Щоб обійти труднощі пов'язані з розбіжністю інтеграла Фур'є у випадку перетворення стаціонарного процесу $x(t)$ з нього виключають постійну складову і вводять у розгляд „усічені" реалізації $x_i(t)_T$, що представляють кінцеві відрізки довжиною T необмежених у часі реалізацій $x_i(t)$, після чого за допомогою граничного переходу $T \to \infty$ знаходять так називаний енергетичний спектр *і-тої* реалізації

$$G_i(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E_i(\omega)_T}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\dot{S}_i(\omega)_T \cdot \dot{S}_i(-\omega)_T}{T} \qquad (6.103)$$

Він характеризує частотний розподіл усередненої за часом потужності в *і-тій* реалізації процесу. Тому **характеристику** $G(\omega)$ **називають**

спектральною щільністю потужності; вона визначається як математичне чекання характеристики $G_i(\omega)$:

$$G(\omega) = \lim \frac{\left\langle \left| \dot{S}(\omega)_T \right|^2 \right\rangle}{T} \qquad (6.104)$$

У приведеній формулі опущений індекс i в спектральної щільності $\dot{S}_i$, оскільки при усередненні враховується весь ансамбль реалізацій.

Властивості $G(\omega)$:

1) $G(\omega)$ – дійсна від'ємна функція частоти;

2) $G(\omega)$ – парна функція частоти, тобто $G(\omega) = G(-\omega)$.

Розходження між звичайним спектром Фур'є детермінованого сигналу й енергетичним спектром випадкового сигналу полягає в тому, що останній являє собою не точний частотний образ якого-небудь коливання, а усереднену характеристику частотних властивостей цілого ансамблю можливих реалізацій випадкового процесу, що розрізняються між собою.

6.5.2. Формула Вінера – Хінчина

При доказі формули Вінера - Хінчина користуються тим, що добутку спектральних функцій відповідає згортка їхніх оригіналів

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\dot{S}_{iT}\cdot\dot{S}_{iT}^{*}}{T}\leftrightarrow\lim\frac{x_{iT}\otimes\breve{x}_{iT}}{T}, \tag{6.105}$$

Розкривши вираз згортки (символ $\otimes$), одержують формулу автокореляційної функції (АКФ) коливання $x_i(t)$

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{(T)}x_i(t)\cdot x_i(t-\tau)\,dt, \tag{6.106}$$

Щоб одержати остаточний результат, варто зробити усереднення по безлічі реалізацій в обох частинах виразу (6.105). Остаточну формулу можна записати у виді пари перетворень Фур'є

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau=G(\omega)\leftrightarrow R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega, \tag{6.107}$$

де $R(\tau)$ – АКФ стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ з нульовим математичним чеканням.

Користуючись властивостями парності АКФ і спектральної щільності потужності, формулу Вінера - Хінчина представляють таким чином

$$G(\omega)=2\int_{0}^{+\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\cdot \mathrm{d}\tau, \tag{6.108}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}G(\omega)\cos\omega\tau\cdot \mathrm{d}\omega. \tag{6.109}$$

Нерідко замість „кругової” частоти ω беруть „циклічну” частоту $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$. При такій заміні пряме і зворотне перетворення Фур'є здобувають симетричний вид

$$G(f) = 2\int_{0}^{+\infty} R(\tau)\cos 2\pi f\tau \cdot \mathrm{d}\tau, \tag{6.110}$$

$$R(\tau) = 2\int_{0}^{+\infty} G(\omega)\cos 2\pi f\tau \cdot \mathrm{d}f. \tag{6.111}$$

6.5.3. Властивості спектрально-кореляційних характеристик стаціонарного випадкового процесу

Автокореляційній функції й енергетичному спектрові всякого процесу притаманні властивості, що характерні для будь-якої пари функцій, пов'язаних перетворенням Фур'є. Зокрема, чим ширше спектр $G(\omega)$, тим більш вузька функція $R(\tau)$, і навпаки. Як міру ширини енергетичного спектра стаціонарного випадкового процесу часто беруть „енергетичну ширину” Δf_E, визначаючи її за формулою

$$\Delta f_E = \int_{0}^{+\infty} \frac{G(f)df}{G(f_0)}, \tag{6.112}$$

де $G(f_0)$- значення спектральної щільності потужності на частоті f_0. Звичайно f_0 відповідає положенню максимуму спектральної щільності потужності. Ширину кривої $R(\tau)$ прийнято оцінювати інтервалом кореляції, що знаходять за формулою

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \int_0^{+\infty} R(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^{+\infty} r(\tau) \mathrm{d}\tau, \qquad (6.113)$$

де $r(\tau)$ – нормалізована АКФ (коефіцієнт кореляції). Кількісний зв'язок між енергетичною шириною спектра випадкового процесу і його інтервалом кореляції за умови $f_0 = 0$ представляють у виді:

$$2\Delta f_E \cdot 2\tau_K = 1. \qquad (6.114)$$

Тоді, знаючи інтервал кореляції випадкового процесу можна визначити енергетичну ширину спектра і навпаки.

6.5.4. Білий шум

У випадках, коли шум виникає в результаті спільного протікання слабко залежних явищ, миттєві значення одержуваного випадкового процесу виявляються майже не зв'язаними в статистичному змісті в досить близькі моменти часу.

Для багатьох задач дуже зручним є наближене представлення АКФ подібного процесу у виді δ- функції

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \qquad (6.115)$$

де $\frac{N_0}{2}$ – постійний множник.

Зміст (6.115) полягає в тому, що значення випадкового процесу в будь-які два як завгодно близькі моменти часу вважаються некорельованими. Спектральна щільність потужності даного процесу дорівнює

$$G(\omega) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot \mathrm{d}\tau . \tag{6.116}$$

Тому що $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot \mathrm{d}\tau = 1$, то

$$G(\omega) = \frac{N_0}{2} . \tag{6.117}$$

Таким чином, спектральна щільність потужності процесу постійна при всіх частотах. **Випадковий процес, що володіє рівномірним енергетичним спектром, називають білим шумом.**

Якщо знайти повну потужність (дисперсію) розглянутого процесу, то результат $\sigma^2 = \infty$ буде абсурдним з фізичної точки зору. Це є наслідком прийнятої ідеалізації. У той же час така ідеалізація цілком застосовна, коли час кореляції шуму набагато менше постійної часу системи.

Використання поняття білого шуму дозволяє знаходити всі необхідні характеристики випадкового процесу на виході перетворювача з використанням тільки характеристик перетворювача.

6.5.5. Спектрально-кореляційні характеристики випадкового сигналу на виході лінійного вимірювального перетворювача

Розглянемо правила перебування енергетичного спектра $G_2(\omega)$ й АКФ $R_2(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу на виході лінійного вимірювального перетворювача з амплітудно - фазовою характеристикою $K(j\omega)$ або імпульсною характеристикою $g(t)$ за умови, що спектральна щільність потужності $G_1(\omega)$ або АКФ $R_1(\tau)$ задані (рис. 6.17).

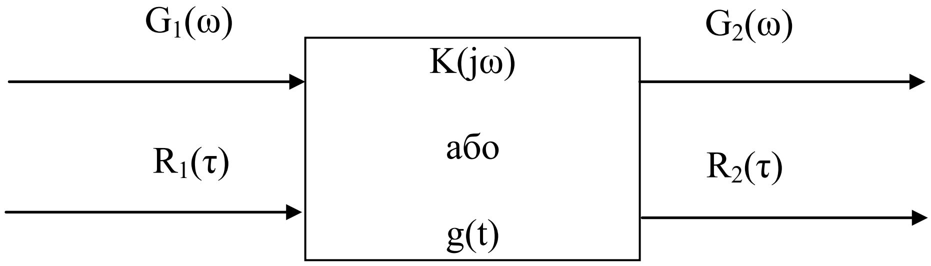


Рис. 6.17 - Спектрально - кореляційні характеристики на вході і виході перетворювача

У теорії ланцюгів доведено, що енергетичний спектр на виході лінійного перетворювача дорівнює добутку квадрата модуля коефіцієнта перетворення на спектральну щільність потужності вхідного сигналу, тобто

$$G_2(\omega) = K^2(\omega) \cdot G_1(\omega). \tag{6.118}$$

Використовуючи зворотне перетворення Фур'є функції $G_2(\omega)$, одержимо $R_2(\tau)$- АКФ вихідного сигналу.

АКФ вихідного сигналу можна одержати і безпосередньо, як згортку $R_1(\tau)$ з деякою функцією $\varphi(\tau)$, що має своїм Фур'є - зображенням квадрат модуля частотної характеристики $K^2(\omega)$:

$$R_2(\tau) = \varphi(\tau) \otimes R_1(\tau) \leftrightarrow K^2(\omega) \cdot G_1(\omega) = G_2(\omega), \tag{6.119}$$

де

$$K^2(\omega) \leftrightarrow \varphi(\tau). \tag{6.120}$$

Якщо властивості лінійного перетворювача задані не амплітудно-фазовою характеристикою, а імпульсною характеристикою $g(t)$, то функція $\varphi(\tau)$ дорівнює

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\Theta) \cdot g(\Theta - \tau) d\Theta, \tag{6.121}$$

Іноді функцію $\varphi(\tau)$ називають автокореляційною функцією імпульсного відгуку лінійного ланцюга. Вибір доцільного методу розрахунку спектрально-кореляційних характеристик випадкового процесу залежить від того, яка з них необхідна – спектральна щільність потужності або АКФ, яким чином задані динамічні характеристики перетворювача, як задані параметри вихідного процесу.

При відшуканні вихідних характеристик $G_2(\omega)$ або $R_2(\tau)$ за відомими вхідними $G_1(\omega)$ або $R_1(\tau)$ й однієї з функцій, що характеризують динамічні властивості перетворювача $K(j\omega)$, $K^2(\omega)$, $g(t)$ або $\varphi(\tau)$, оптимальний спосіб розрахунку (алгоритм) з мінімальним числом однократних інтегральних перетворень можна вибрати за допомогою умовної схеми (графа) на рис. 6.18.

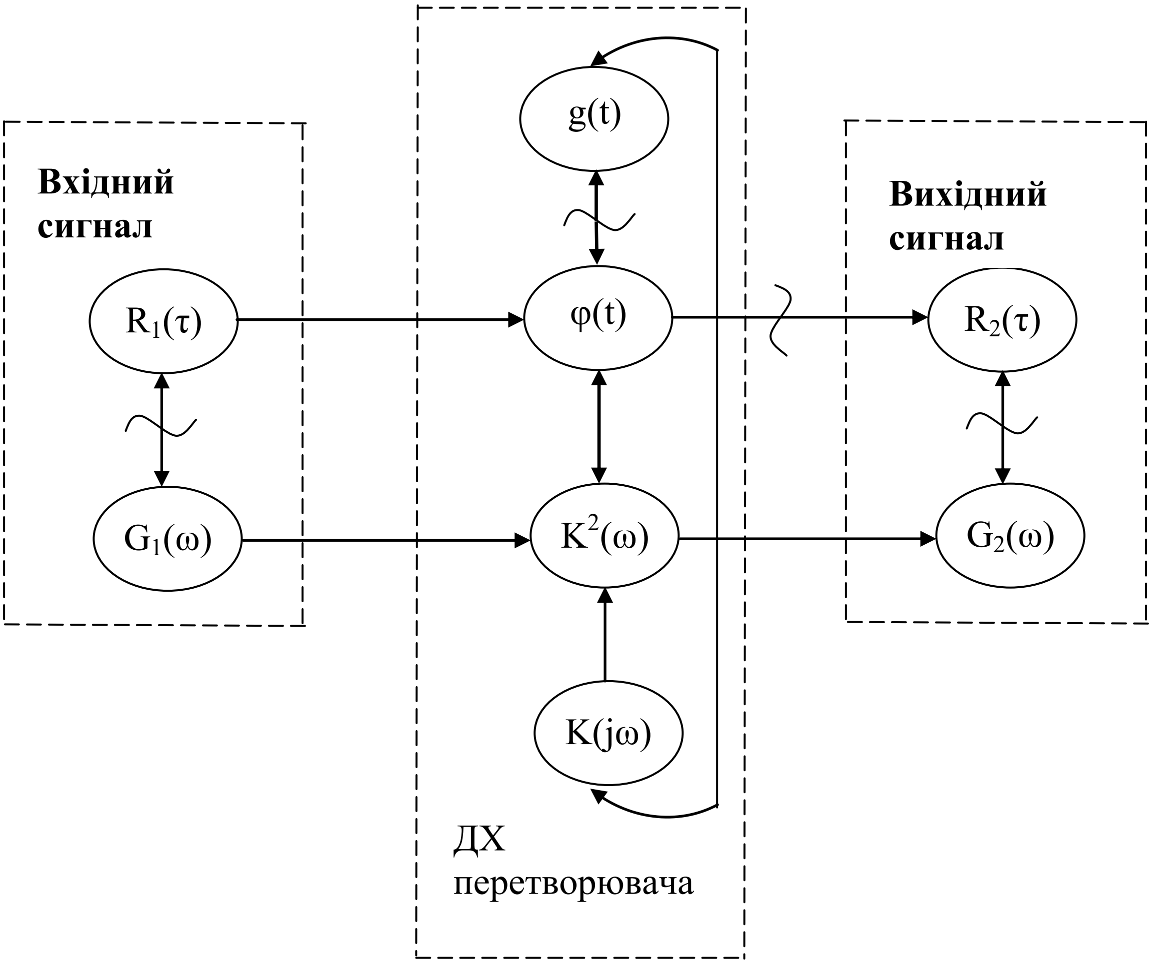


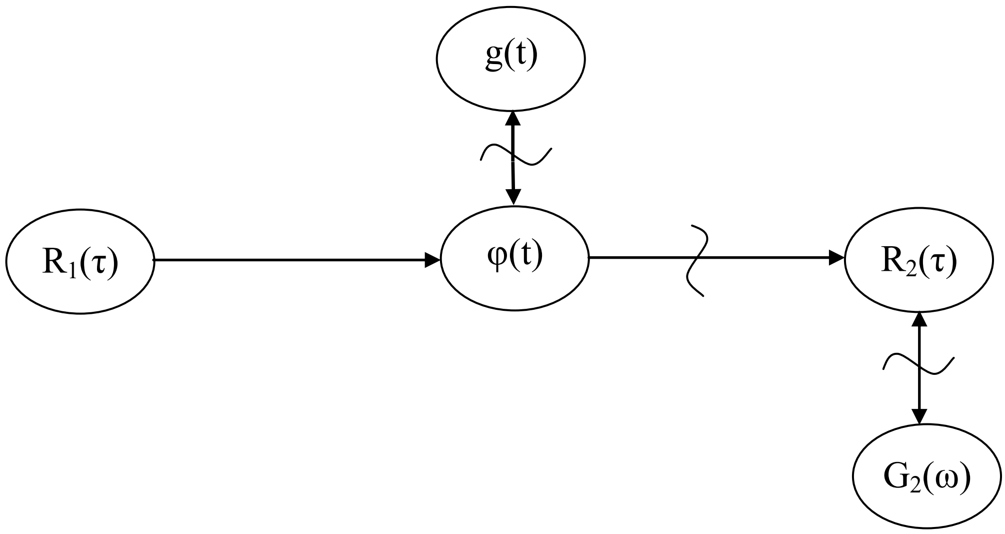
Рис. 6.18 - Схема (граф) для вибору способу розрахунку вихідних характеристик $R_2(\tau)$ або $G_2(\omega)$

Ліворуч на схемі в кружках записані дві можливі характеристики вхідного процесу – АКФ $R_1(\tau)$ або спектральна щільність потужності $G_1(\omega)$.

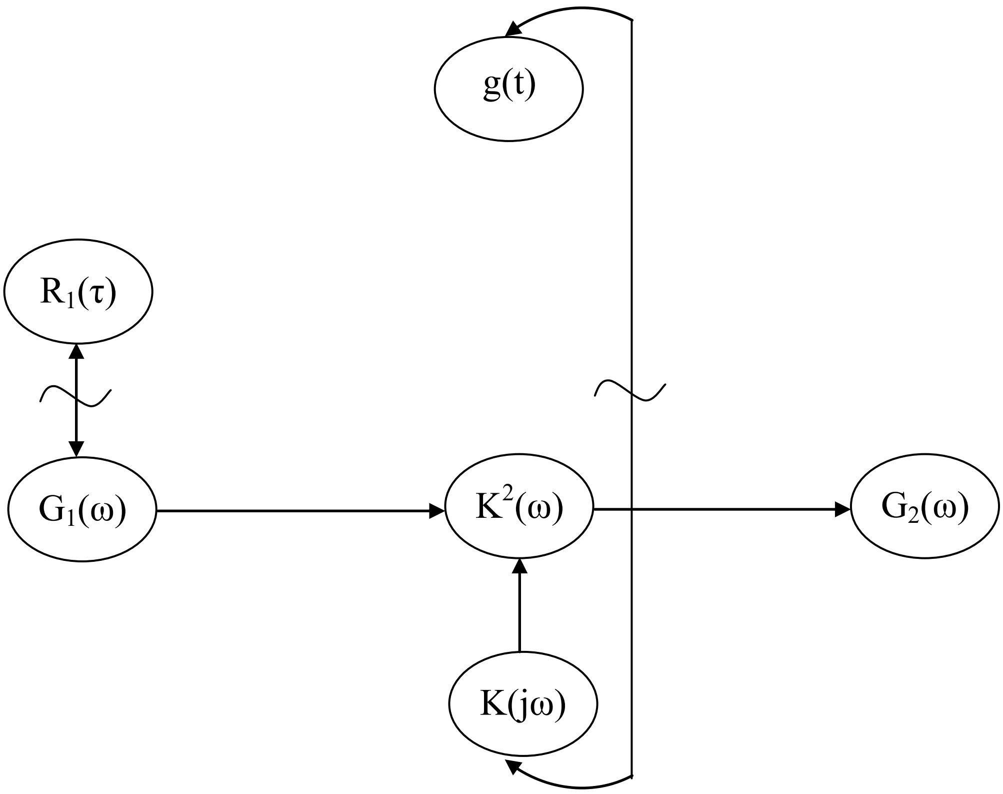
Кожна зі стрілок між ними вказує на можливість переходу від однієї з характеристик до інший шляхом математичного перетворення, а хвиляста риска на стрілці пояснює, що перетворення є інтегральним. У середній
частині графа приведений перелік можливих динамічних характеристик перетворювача. Праворуч на схемі зазначені можливі характеристики вихідного випадкового сигналу.

Розглянемо як приклад наступні умови. Дано $R_1(\tau)$ і $g(t)$, знайти $G_2(\omega)$. Будуємо можливі алгоритми розв'язання задачі, залишаючи в схемі рис. 6.18 обраний шлях.

Варіант 1



Варіант 2



Порівнюючи обидва варіанти, можемо припустити, що другий вигідніший першого, тому що він включає лише дві операції інтегрування, тоді як за першим алгоритмом їх прийдеться виконати тричі. Пояснимо конкретний зміст перетворень у другому алгоритмі. Перехід від $R_1(\tau)$ до $G_2(\omega)$ відбувається за формулою Вінера - Хінчина, амплітудно - фазова характеристика знаходиться як зображення Фур'є для $g(t)$. Далі шукаємо квадрат модуля цієї функції і шляхом його добутку з $G_1(\omega)$ одержуємо $G_2(\omega)$.

6.5. Динамічні похибки лінійних вимірювальних перетворювачів

6.6.1. Поняття динамічної похибки

Нехай ВП використовується в динамічному режимі (рис. 6.19) і нехай $x(t)$ - інформативний параметр вхідного сигналу (вимірювана величина), $y(t)$- інформативний параметр вихідного сигналу.

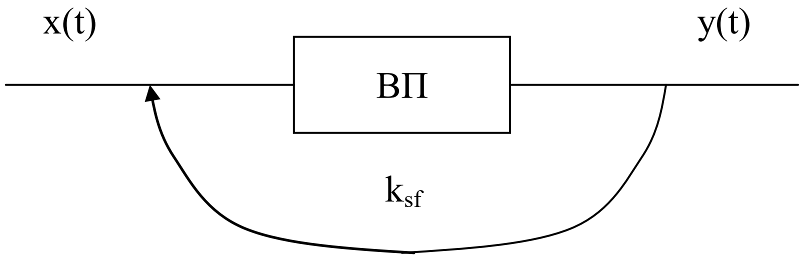


Рис. 6.19 - Ілюстрація прийнятих позначень

Динамічний режим використання ВП характеризується такими змінами *x(t)*, що впливають на результат вимірювання. Динамічний режим може бути обумовлений також змінами неінформативного параметра сигналу, величини, що впливає, сигналу керування, перешкоди, структури ВП. При проведенні динамічних вимірювань необхідно враховувати динамічні характеристики використовуваних ЗВТ.

Похибка результату динамічного вимірювання – це відхилення результату динамічного вимірювання від істинного значення вимірюваної величини (миттєвого сигналу). Тому похибка у динамічному режимі містить у собі дві складові: статичну і динамічну. Звідки **динамічна похибка ВП – це різниця між похибкою ВП у динамічному режимі і його статичною похибкою, що відповідає значенню величини в даний момент часу** [26].

6.6.2. Оцінювання динамічної похибки в часовій області

Якщо знехтувати статичною похибкою, то динамічна похибка (приведена до входу ЗВТ) дорівнює:

$$\Delta_Д(t) = x_N(t) - x(t), \tag{6.122}$$

де $x_N(t) = \dfrac{y(t)}{k_{sf}}$, $x(t)$- істинне значення вимірюваної величини, k_{sf} - номінальний коефіцієнт перетворення ВП.

У якості k_{sf} може бути використаний статичний коефіцієнт перетворення $k(0)$. Таким чином, вираз для динамічної похибки лінійного ВП має вигляд:

$$\Delta_Д(t) = \frac{y(t)}{k_{sf}} - x(t). \tag{6.123}$$

Для нелінійного ВП з номінальною характеристикою перетворення $y(t) = f_{sf}[x(t)]$ динамічна похибка має вигляд:

$$\Delta_Д(t) = f_{sf}^{-1}[y(t)] - x(t), \tag{6.124}$$

де $f_{sf}^{-1}[y(t)]$- функція, зворотна номінальній характеристиці перетворення.

Якщо для перетворювача нормована, наприклад, передатна функція $K(p)$, то:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}[X(p) \cdot K(p)], \tag{6.125}$$

де $L^{-1}[Y(p)]$ - зворотне перетворення Лапласа, $X(p)$ - перетворення Лапласа вхідного сигналу $x(t)$.

Тоді вираз для динамічної похибки (6.123) приймає вид:

$$\Delta_Д(t) = \frac{1}{k_{sf}} L^{-1}[X(p) \cdot K(p)] - x(t). \tag{6.126}$$

З виразу (6.126) видно, що для оцінювання динамічної похибки використовуються модель вхідного сигналу і модель перетворювача (динамічна характеристика). Для нелінійного ВП формула (6.126) приймає вид:

$$\Delta_Д(t) = f_{sf}^{-1}\left\{L^{-1}\left[Y(p)\right]\right\} - x(t). \qquad (6.127)$$

Якщо для перетворювача представлені характеристики в часовій області, наприклад, імпульсна характеристика, то $y(t)$ у виразі (6.123) визначається таким чином:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)g(u)du. \qquad (6.128)$$

В часовій області оцінюють тільки абсолютну динамічну похибку.

6.6.3. Оцінювання динамічної похибки в частотній області

Зображення Лапласа абсолютної динамічної похибки (динамічна похибка у частотній області) може бути отримане з (6.123) у виді:

$$\Delta_Д(p) = \frac{Y(p)}{k_{sf}} - X(p) = \frac{X(p)K(p)}{k_{sf}} - X(p) = X(p)\left[\frac{K(p)}{k_{sf}} - 1\right], \qquad (6.129)$$

або з використанням статичного коефіцієнта перетворення у виді:

$$\Delta_Д = X(p)\left[\frac{K(p)}{K(0)} - 1\right]. \qquad (6.130)$$

Так як $\Delta_Д(p) = X(p)\delta_Д(p)$, де $\delta_Д(p)$ - відносна динамічна похибка, то можна одержати наступне співвідношення:

$$\delta_Д(p) = \frac{K(p)}{K(0)} - 1 \quad \text{або} \quad \delta_Д(p) = \frac{K(p)}{k_{sf}} - 1. \qquad (6.131)$$

Для оцінювання відносної динамічної похибки не потрібна модель сигналу, це характеристика динамічних властивостей самого перетворювача. Відносна динамічна похибка може бути представлена у виді:

$$\delta_Д(jw) = \delta_Д(p)\Big|_{p=jw} .$$

Якщо її представити у виді:

$$\delta_Д(jw) = \delta_Д(\omega)\exp\big(j\varphi_Д(\omega)\big), \qquad (6.132)$$

то можна одержати динамічні похибки в частотній області – амплітудно-частотну $\delta_Д(\omega)$ і фазо-частотную $\varphi_Д(\omega)$.

РОЗДІЛ 7. ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЇ В ЦИФРОВИХ ЗАСОБАХ ВИМІРЮВАННЯ

7.1 Основні особливості формування вимірювальної інформації в цифрових засобах вимірювання (ЦЗВ)

7.1.1. Похибка ЦЗВ від квантування

7.1.1.1. Квантування і дискретизація

У ЦЗВ вимірювана фізична величина піддається квантуванню і дискретизації. **Квантування** даної величини x полягає в поділі цієї величини на ступіні квантування q_x [3]. У результаті наступного числового кодування кожен розмір вимірюваної величини x представляється на виході ЦЗВ значенням x_N:

$$x_N = N_x \cdot q_x,$$

де N_x – числове значення величини x або число ступіней квантування; x_N - показання ЦЗВ.

Число ступіней квантування дорівнює

$$N_x = E\left|\frac{x}{q_x}\right|,$$

де $E|A|$ – ціла частина числа А.

Дискретизація в часі полягає в представленні безперервної функції часу $x(t)$ поруч з її миттєвими значеннями (рис. 7.1), що звичайно йдуть через однакові інтервали часу $T_д$ (тривалість циклу дискретизації). Інтервали $T_д$ можуть змінюватися, наприклад, при адаптивній дискретизації. Адаптація виробляється до швидкості зміни вимірюваного сигналу. Якщо швидкість зміни сигналу збільшується, інтервал $T_д$ зменшується і, навпаки, якщо швидкість зміни сигналу зменшується, то інтервал $T_д$ збільшується. Тобто адаптивна дискретизація – це дискретизація в часі, що пристосовується (рис. 7.2).

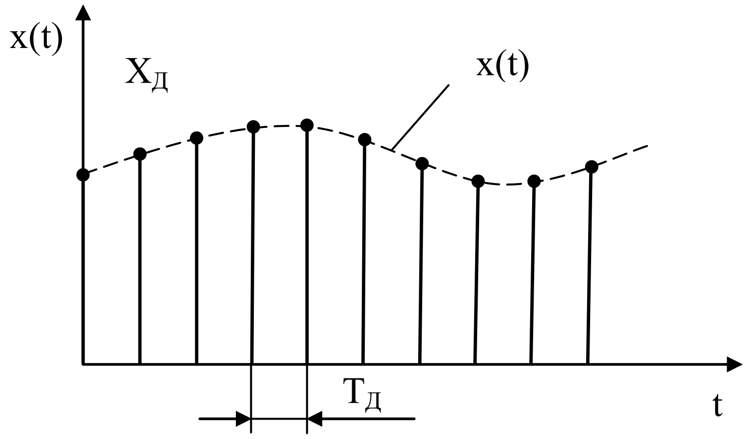


Рис. 7.1 - Дискретизований сигнал при $T_д$ =const

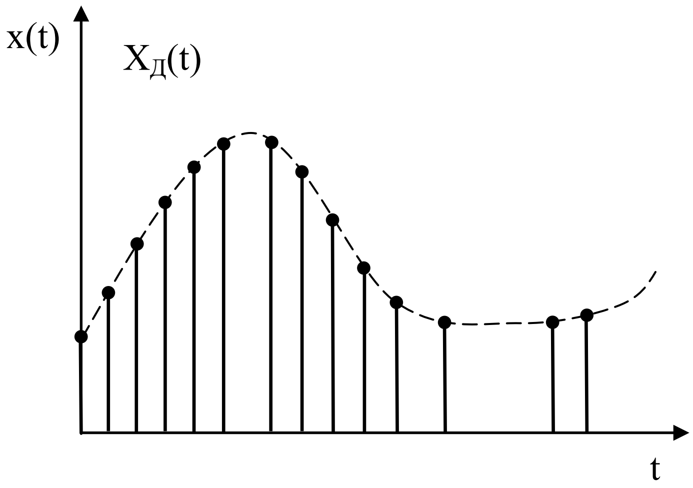


Рис. 7.2 - Дискретизований сигнал при $T_д$ =var, адаптивна дискретизація

Зі збільшенням номінального числа ступіней квантування N_H і зменшенням часу дискретизації $T_д$ складність і вартість цифрових приладів зростають. Число ступіней квантування і тривалість циклу дискретизації необхідно вибирати за заданим значенням похибки і швидкодії з урахуванням зростаючої складності апаратури при збільшенні N_H і зменшенні $T_д$.

7.1.1.2 Алгоритми квантування

Вимірювана величина, що знаходиться між двома відомими значеннями $x_N = N_x \cdot q_x$ і $x_{N+1} = (N+1)\cdot q_x$, може бути представлена цифровим засобом вимірювання:

1) меншим числовим значенням $N_x = N$;

2) більшим числовим значенням $N_x = N+1$;

3) ближчим числовим значенням N або $N+1$.

У першому випадку, рівняння ЦЗВ, що відображає залежність між входом і виходом, буде мати такий вигляд:

$$N_x = E\left|\frac{x}{q_x}\right|. \tag{7.1}$$

В другому випадку рівняння ЦЗВ, має вигляд:

$$N_x = E\left|\frac{x}{q_x} + 1\cdot \operatorname{sign}(x)\right|, \tag{7.2}$$

де $$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0; \\ 0, & при \quad x = 0; \\ -1, & при \quad x < 0. \end{cases}$$

Для позитивних значень x рівняння (7.2) спрощується:

$$N_x = E\left|\frac{x}{q_x} + 1\right|.$$

У третьому випадку при оцінці x найближчим з числових значень N і $N+1$ рівняння ЦЗВ має вигляд:

$$N_x = E\left|\frac{x}{q_x} + 0.5\cdot \operatorname{sign}(x)\right|. \tag{7.3}$$

Для позитивних значень x рівняння (7.3) має вигляд

$$N_x = E\left|\frac{x}{q_x} + 0.5\right|.$$

7.1.1.3. Статистичні характеристики похибки квантування

Похибкою квантування ЦЗВ $\Delta_K = x_N - x$ є різниця між результатом вимірювання x_N і істинним значенням вимірюваної величини x, якщо усі ланки ЦЗВ ідеальні і не мають похибок. Похибка квантування виникає від недосконалості самого вимірювання як виду відображення, оскільки в цьому випадку безперервний розмір виражається в обмеженій безлічі чисел – результатів вимірювання. Похибка квантування звичайно адитивна за характером, тобто не залежить від x. Статистичні характеристики похибки квантування визначаються алгоритмом квантування. Для алгоритму квантування (7.1) похибка квантування дорівнює:

$$\Delta_K = N_x \cdot q_x - x = -\mathrm{Fr}\left|\frac{x}{q_x}\right| \cdot q_x \quad , \tag{7.4}$$

де $\mathrm{Fr}|A|$ - дробова частина А.

Розподіл похибки Δ_K рівномірний і розташований в області негативних значень аргументу, тому що $N_x \cdot q_x \le x$. У цьому випадку максимальна похибка $\left|\Delta_{K\,\max}\right| = q_x$ (рис. 7.3 а). Математичне чекання похибки $M\left[\Delta_K\right] = -\frac{q_x}{2}$. СКВ похибки дорівнює $\sigma\left[\Delta_K\right] = \frac{q_x}{2\sqrt{3}}$.

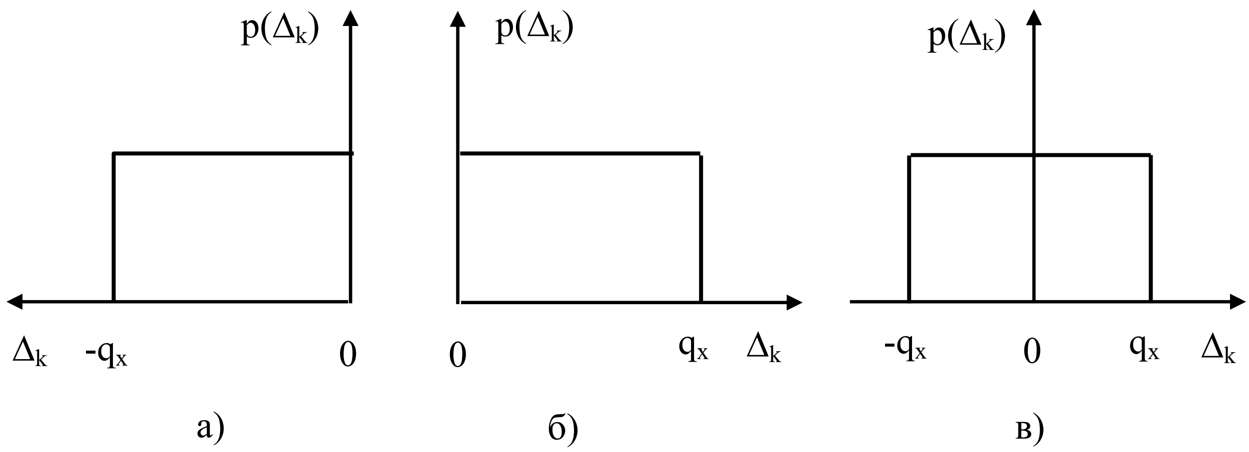


Рис. 7.3 - Розподіли похибки квантування при різних алгоритмах квантування

Для алгоритму квантування (7.2) похибка квантування дорівнює

$$\Delta_K = (N_x + 1) \cdot q_x - x = \left\lfloor 1 - \mathrm{Fr}\left|\frac{x}{q_x}\right| \right\rfloor \cdot q_x\,. \tag{7.5}$$

Розподіл похибки рівномірний, але розташований в області позитивних значень Δ_K (рис. 7.3 б).

Максимальне значення похибки $\left|\Delta_{K\max}\right| = q_x$.

Математичне чекання похибки дорівнює $M\left[\Delta_K\right] = \dfrac{q_x}{2}$, а СКВ дорівнює $\sigma\left[\Delta_K\right] = \dfrac{q_x}{2\sqrt{3}}$.

Для алгоритму квантування (7.3) похибка квантування дорівнює

$$\Delta_K = 0{,}5 \cdot q_x - \mathrm{Fr}\left|\frac{x}{q_x}\right| \cdot q_x\,. \tag{7.6}$$

Розподіл похибки квантування в цьому випадку рівномірний в інтервалі $-\dfrac{q_x}{2} \le \Delta_K \le \dfrac{q_x}{2}$, (рис. 7.3 в). Максимальне значення похибки $\left|\Delta_{K\max}\right| = \dfrac{q_x}{2}$

(рис. 7.3 а). Математичне чекання похибки $M\left[\Delta_K\right]=0$; СКВ похибки дорівнює $\sigma\left[\Delta_K\right]=\frac{q_x}{2\sqrt{3}}$.

У будь-якому ЦЗВ з цифровим відліковим пристроєм передбачена визначена кількість десяткових розрядів. Якщо у всіх розрядах використовуються всі десять можливих станів, що відповідають цифрам від 0 до 9, то максимальне число N_H, що може проходити індикацію на цифровому відліковому пристрої, наприклад із трьох десяткових розрядів, складає 999, а при чотирьох розрядах 9999 тощо. Але зустрічаються випадки, коли старший розряд є неповним. Наприклад, є цифрові вольтметри, у яких у старшому розряді 0 або 1, а в інших трьох - усі десять станів. У цьому випадку N=1999. Значення N_H називають номінальним числом ступіней квантування. При цьому максимальне значення вимірюваної величини (верхня межа вимірювання) $x_H = N_H \cdot q_X$.

При регламентації класу точності для ЦЗВ, використовують приведену похибку квантування $\gamma_K = \frac{\Delta_K}{X_H}$. Тоді максимальне значення приведеної похибки квантування (для алгоритму квантування (7.3)) дорівнює:

$$\gamma_{K\max} = \frac{\Delta_{K\max}}{X_H} = \frac{q_x}{2N_H \cdot q_x} = \frac{1}{2N_H}.$$

Якщо $\Delta_{K\max} = q_X$ (для алгоритмів квантування (7.1), (7.2)), максимальне значення приведеної похибки квантування дорівнює

$$\gamma_{K\max} = \frac{1}{N_H}.$$

Якщо в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП) вимірювана величина представляється в двійковому коді, то $N_H = 2^n$, де n - число двійкових розрядів.

У цьому випадку для алгоритму квантування (7.3):

$$\gamma_{K\max} = 2^{-(n+1)},$$

а для алгоритмів квантування (7.1), (7.2):

$$\gamma_{K\max} = 2^{-2}.$$

7.1.1.4. Похибка квантування часового інтервалу

Вимірюваний інтервал часу T_X звичайно обмежується старт-імпульсом на початку і стоп-імпульсом наприкінці. У багатьох ЦЗВ вимірювана величина перетворюється в часовий інтервал T_X. Часовий інтервал тривалістю T_X квантується на N інтервалів квантуючими імпульсами з періодом повторення T_0. У загальному випадку T_X не кратний T_0 і тому при квантуванні T_X виникає похибка від квантування. Старт-імпульсом відкривається електричний ключ, що пропускає квантуючі імпульси (рис. 7.4) до лічильника, а стоп-імпульсом, через час T_X, ключ закривається, і доступ квантуючих імпульсів до лічильника припиняється. Результат вимірювання T_X визначають як T_N, рівне $T_N = N \cdot T_0$

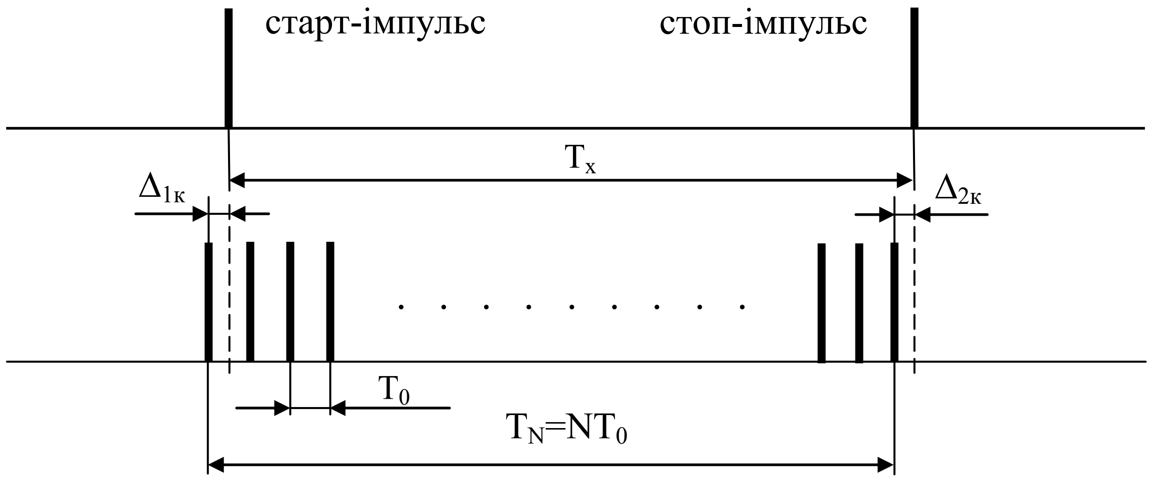


Рис. 7.4 - Ілюстрація виникнення похибки при квантуванні часового інтервалу

У загальному випадку старт- і стоп-імпульси можуть з'являтися в будь-який випадковий момент часу між відповідними квантуючими імпульсами. При цьому виникає похибка

$$\Delta_T = NT_0 - T_X = \Delta_{1K} - \Delta_{2K} \, ,$$

де Δ_{1K} - складова похибки через відсутність синхронізації старт-імпульсу і послідовності квантуючих імпульсів; Δ_{2K} - похибка квантування. Розподіли щільності імовірності складових похибки Δ_{1K} , $-\Delta_{2K}$ і сумарної похибки Δ_T приведені на рис. 7.5.

Таким чином, розподіл сумарної похибки Δ_T є розподілом Сімпсона.

Максимальна похибка дорівнює: $\Delta_{T\max} = T_0$. СКВ похибки Δ_T дорівнює: $\sigma[\Delta_T] = \dfrac{T_0}{\sqrt{6}}$.

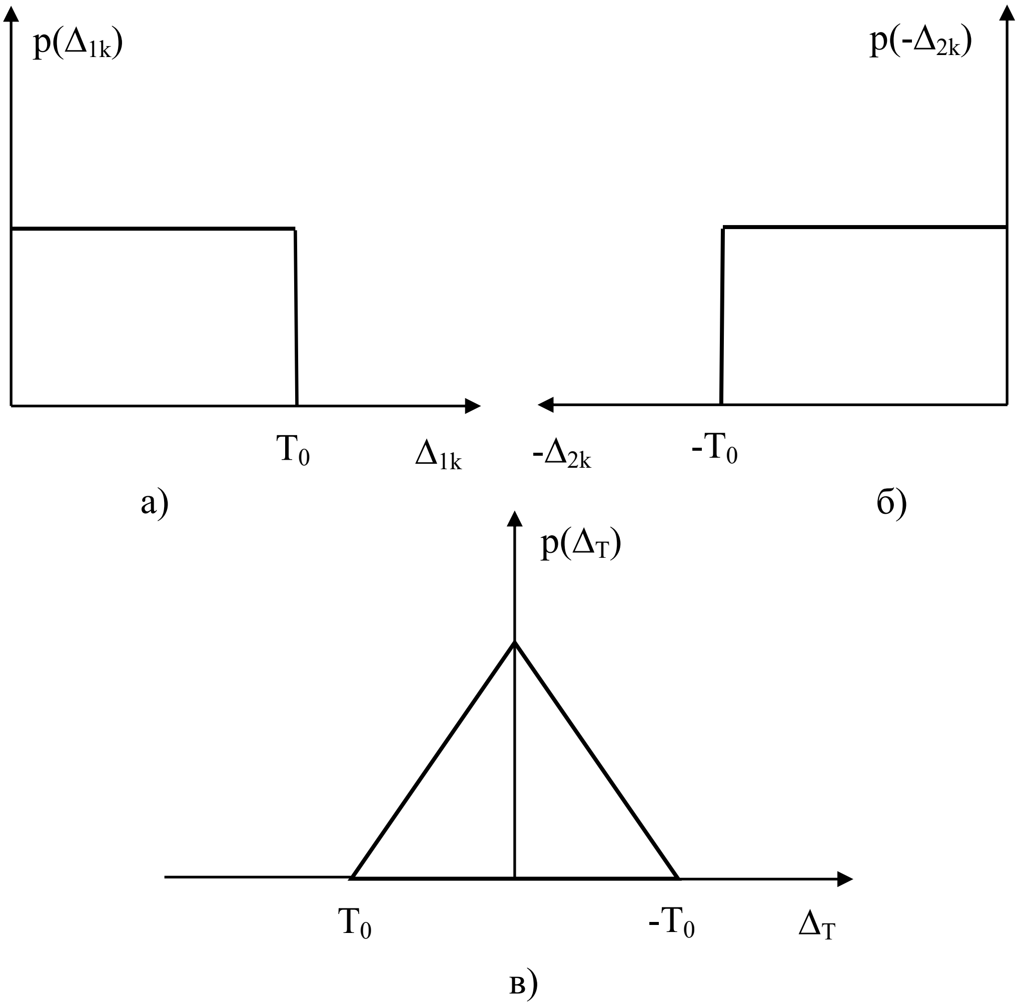


Рис. 7.5 - Розподіли складових похибки і сумарної похибки

7.1.2. Математична модель ЦЗВ або рівняння вимірювання

Розглянемо структурну модель засобу вимірювання (ЗВ), приведену на рис. 7.6, де *Д* – датчик з коефіцієнтом перетворення $K_{д}$, АВП – аналоговий вимірювальний перетворювач з коефіцієнтом перетворення $K_{авп}$, АЦП – аналого-цифровий перетворювач з рівнянням вимірювання (при квантуванні округленням)

$$N_y = E\left|\frac{y}{q_y} + 0.5 \cdot \mathrm{sign}\left(y\right)\right|, \tag{7.7}$$

де N_y – числове значення величини y; $E|\bullet|$ - ціла частина числа, $q_у$ – ступінь квантування, sign y – знакова функція.

Математична модель засобу вимірювання являє собою залежність між N_y і вимірюваною величиною x.

$$N_y = E\left|\frac{x \cdot K_Д \cdot K_{АВП}}{q_y} + 0.5 \cdot \mathrm{sign}\,(y)\right|, \tag{7.8}$$

Рівняння (7.8) незручне для аналізу через наявність нелінійності, обумовленої квантуванням (рис. 7.5). Тому рівняння (7.7) представляють у наступному виді

$$N_y = \frac{y}{q_y} + F_ч\left|\frac{y}{q_y} + 0.5 \cdot \mathrm{sign}\,(y)\right| = \frac{y}{q_y} + \Delta_{кв}, \tag{7.9}$$

де $\Delta_{кв}$ – похибка квантування, рівна

$$\Delta_{кв} = F_г\left|\frac{y}{q_y} + 0.5 \cdot \mathrm{sign}\,(y)\right|, \tag{7.10}$$

де $F_г(\bullet)$ – дробова частина числа.

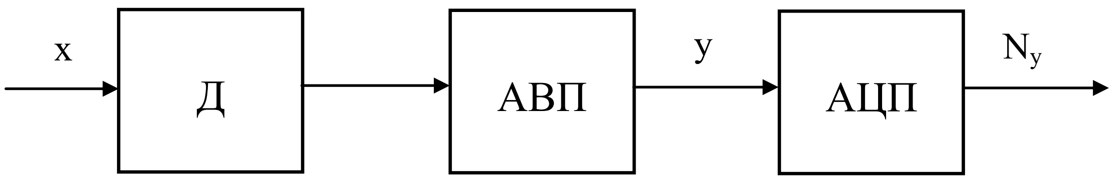


Рис. 7.6 - Структурна схема засобу вимірювання

За умови, що похибка квантування мала

$$N_y \cong \frac{y}{q_y}, \tag{7.11}$$

і рівняння (7.8) за умови (7.11) представляють в остаточному виді

$$N_y = x \cdot K_Д \cdot K_{АВП} \cdot K_{АЦП} = x \cdot K_П, \tag{7.12}$$

де $K_{АЦП} = \dfrac{1}{q_y}$, $K_{п}$ – загальний коефіцієнт перетворення,

$$K_{П} = \frac{N_y}{x} = K_{Д} \cdot K_{АВП} \cdot K_{АЦП}. \qquad (7.13)$$

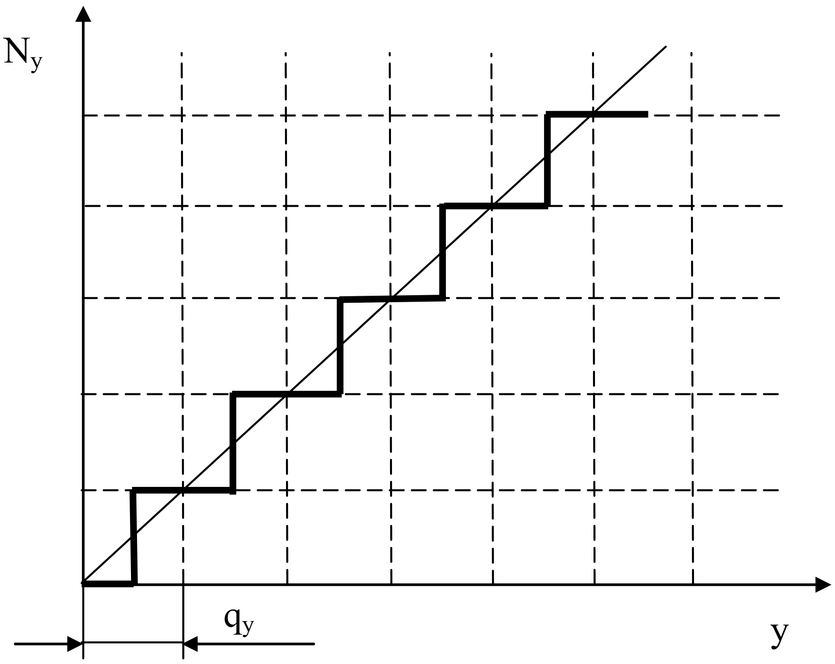


Рис. 7.7 - Графік залежності між N_y і y

Рівняння (7.12) – це рівняння ідеального ЗВ і з цього рівняння знаходять нормуюче значення:

$$N_{ун} = K_{п} \cdot x_{н}. \qquad (7.14)$$

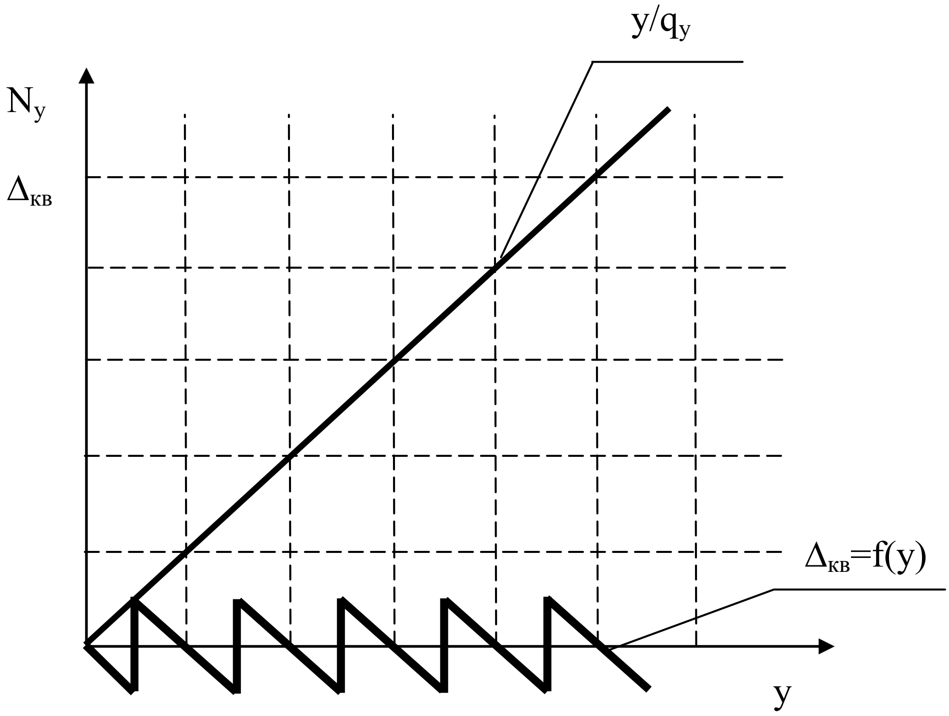


Рис. 7.8 - Представлення рівняння вимірювання у виді лінійної залежності

7.2. Дискретизація сигналу. Подання дискретизованого сигналу в часовій і частотній областях

7.2.1. Дискретизація сигналу

У попередньому підрозділі вже розглядався той факт, що в ЦЗВ відбувається дискретизація в часі вимірюваної величини, що безперервно змінюється, тобто вхідного сигналу засобу вимірювання. Якщо на вхід ЦЗВ надходить безперервний у часі сигнал, то на виході ЦЗВ одержують часову послідовність кодових комбінацій, кожна з яких являє собою значення вимірюваної величини у визначений момент часу. Ця послідовність кодів може надходити на відліковий пристрій, викликаючи зміну цифрових показань, реєструватися цифродрукуючим пристроєм, надходити на ЕОМ у виді електричного сигналу [3].

Але дискретизація може бути використана і для дискретного способу передачі значень вимірюваної величини по каналах зв'язку, що дозволяє скоротити час, протягом якого канал зв'язку зайнятий передачею цього повідомлення, здійснити часове ущільнення каналу зв'язку, коли одночасно по одному каналу можна передавати два і більш безперервні повідомлення.

При дискретизації безперервного сигналу кожне значення дискретизованого сигналу строго „прив'язано” до визначеного моменту часу.

7.2.2. Подання дискретизованого сигналу в часовій області

Дискретизація безперервного в часі сигналу $x(t)$ є лінійною операцією множення функції $x(t)$ на функцію в часі $f_g(t)$ (рис. 8.9).

$$x_g(t) = x(t) \cdot f_g(t).$$

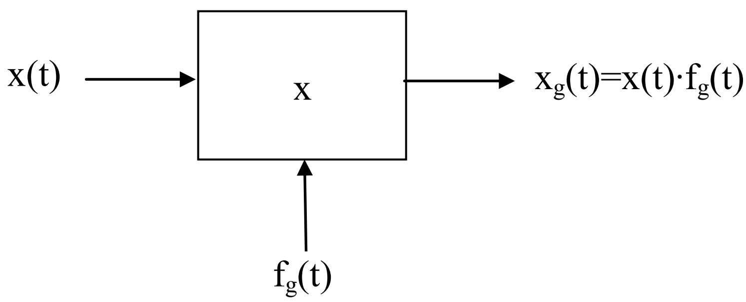


Рис. 7.9 - Ілюстрація одержання дискретизованого сигналу

Ідеальний дискретизований сигнал $x_g(t)$ є послідовністю імпульсів нульової тривалості (рис. 7.11 а). Тому функцію дискретизації представляють як послідовність δ - функцій або функцій Дірака:

$$f_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T), \tag{7.15}$$

де T_g - інтервал дискретизації, $\delta(t)$-дельта-функція або дельта-імпульс (функція Дірака).

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & при \quad <0\\ \infty, & при \quad =0\\ 0, & при \quad >0\end{cases};\qquad (7.16)$$

І
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1;\qquad (7.17)$$

За визначенням δ - функція задовольняє наступним двом умовам: тобто δ - функція дорівнює нулеві при усіх відмінних від нуля значеннях аргументу, приймаючи в точці $t=0$ нескінченно велике значення. Площа δ - функції дорівнює одиниці.

Фільтруюча властивість δ - функції виражається співвідношенням:

$$\int_{t_b}^{t_a} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt=f(t_0),\qquad (7.18)$$

тобто інтеграл від добутку довільної функції $f(t)$, обмеженої в інтервалі часу (t_a,t_b) на дельта функцію $\delta(t-t_0)$ дорівнює значенню функції $f(t)$ в точці $t=t_0$.

Результатом множення довільної функції $f(t)$ на $\delta(t-t_0)$ є дельта-функція, площа якої дорівнює значенню функції $f(t)$ в точці $t=t_0$ ((рис.7.10).

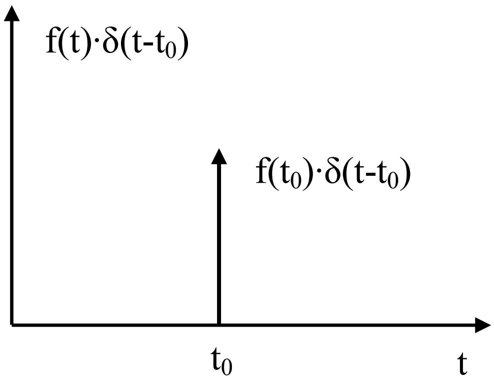


Рис. 7.10 - Ілюстрація множення функції $f(t)$ на дельта функцію

Таким чином, ідеальний дискретизований сигнал $x_g(t)$ є послідовністю імпульсів нульової тривалості, площа яких відповідно дорівнює $x(n \cdot T_g)$, тобто ординатам сигналу в моменти $n \cdot T_g$ (мал. 7.11 а), і може бути аналітично представлений у виді (7.19):

$$x_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - n \cdot T_g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot T_g) \cdot \delta(t - n \cdot T_g). \qquad (7.19)$$

Реальний дискретизований сигнал, отриманий при дискретизації в часі безперервного сигналу $x(t)$ має вигляд імпульсно-модульованого сигналу (мал. 7.11 б), тобто послідовності імпульсів прямокутної форми, амплітуди яких дорівнюють значенням $x(n \cdot T_g)$, а період проходження дорівнює T_g.

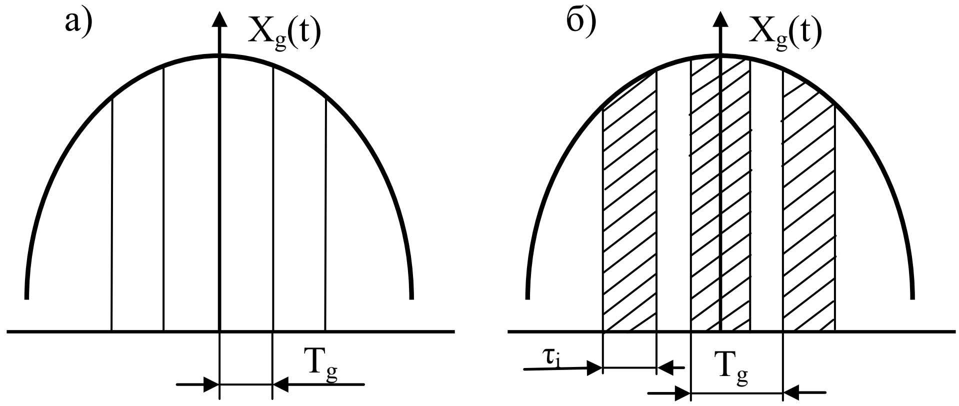


Рис. 7.11 - Дискретизований сигнал: ідеальний(а) і реальний(б)

Реальний дискретизований сигнал може бути отриманий, як показано на рис. 7.9, шляхом множення безперервного сигналу $x(t)$ на послідовність $f_g(t)$ одиничних прямокутних імпульсів тривалістю τ_i і періодом проходження T_g:

$$f_g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{t-n\cdot T_g}{\tau_i}\right), \qquad (7.20)$$

де $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau_i}\right)$ – симетричний прямокутний імпульс з одиничною висотою, що визначається таким чином:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau_i}\right)=\begin{cases}1, & при \quad |t|\le\frac{\tau_i}{2}\\ 0, & при \quad |t|\le\frac{\tau_i}{2}\end{cases}. \qquad (7.21)$$

Тоді подання реального дискретизиваного сигналу в часовій області має вигляд:

$$x_g(t)=x(t)\cdot f_g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t-n\cdot T_g}{\tau_i}\right) \qquad (7.22)$$

або

$$x_g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\cdot T_g)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t-n\cdot T_g}{\tau_i}\right) \qquad (7.23)$$

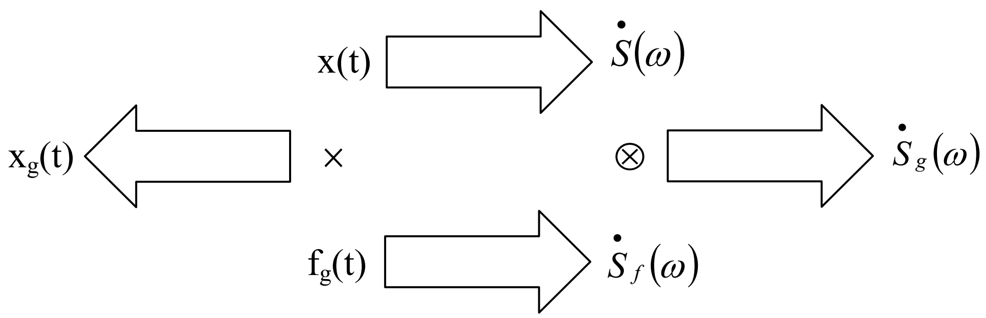
7.2.3. Спектр дискретизованого сигналу

Подання дискретизованого сигналу в часовій області $x_g(t)$ був отриманий як добуток сигналів $x(t)$ і $f_g(t)$. Тоді спектральна щільність $\dot{S}_g(\omega)$ дискретизованого сигналу $x_g(t)$ на підставі теореми про добуток функцій знаходиться згорткою спектральних щільностей співмножників.

Нехай $\dot{S}(\omega)$ – спектральна щільність сигналу $x(t)$, $\dot{S}_f(\omega)$- спектральна щільність сигналу $f_g(t)$, тоді

$$\dot{S}_g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\dot{S}(\omega) \otimes \dot{S}_f(\omega). \tag{7.24}$$

Зв'язок між поданнями дискретизованого сигналу в часовій і частотній областях можна проілюструвати таким чином:



Спектральна щільність $\dot{S}_f(\omega)$ послідовності $f_g(t)$ визначається як у [19]:

$$\dot{S}_f(\omega) = \Omega \cdot \tau_i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}\right)}{n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}} \cdot \delta(\omega - n \cdot \Omega), \tag{7.25}$$

де $\Omega = \frac{2\pi}{T_g}$ – кутова частота проходження імпульсів.

Виконуючи згортку спектральної щільності $\dot{S}(\omega)$ сигналу $x(t)$ і функції $\dot{S}_f(\omega)$, одержимо:

$$\dot{S}_g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\dot{S}(\omega) \otimes \dot{S}_f(\omega) = \frac{\Omega}{2\Omega}\tau_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(u) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}\right)}{n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}} \cdot \delta(\omega - n \cdot \Omega - u)\, du \quad . \tag{7.26}$$

Після перетворень (7.26) одержимо:

$$\dot{S}_g(\omega) = \frac{\Omega \cdot \tau_i}{2\Omega} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}\right)}{n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(u)\delta(\omega - n \cdot \Omega - u)du \quad (7.27)$$

Використовуючи фільтруючу властивість δ- функції одержуємо остаточний вираз:

$$\dot{S}_g(\omega) = \frac{\tau_i}{T_g} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}\right)}{n \cdot \Omega \cdot \frac{\tau_i}{2}} \cdot \dot{S}(\omega - n \cdot \Omega) \quad (7.28)$$

7.2.4. Спектр дискретизованого сигналу при різних співвідношеннях між верхньою частотою в спектрі сигналу і частотою дискретизації

7.2.4.1. Спектр дискретизованого сигналу при частоті дискретизації в два рази більшої верхньої частоти в спектрі сигналу

Процес формування спектра $\dot{S}_g(\omega)$ дискретизованого сигналу $x_g(t)$ пояснюється рис. 7.12, де побудовані графіки сигналів $x(t)$, $f_g(t)$, $x_g(t)$ і модулів їх спектральних щільностей $S(\omega)$, $S_f(\omega)$ і $S_g(\omega)$ відповідно. Спектральна щільність $S(\omega)$ обмежена частотою ω_m (рис. 7.12 а). Спектральна щільність $S_g(\omega)$ дискретизованого сигналу має вигляд спектра $S(\omega)$ вихідного сигналу $x(t)$, що повторюється з періодом $\Omega = 2\omega_m$. Огинаючою спектра $S_g(\omega)$ з точністю до коефіцієнта $1/T_g$ є спектральна щільність $S_f(\omega)$ прямокутного імпульсу з тривалістю τ_i. Центральна (заштрихована) частина спектра $S_g(\omega)$ сигналу повторює за формою спектр $S(\omega)$ вихідного безперервного сигналу $x(t)$.

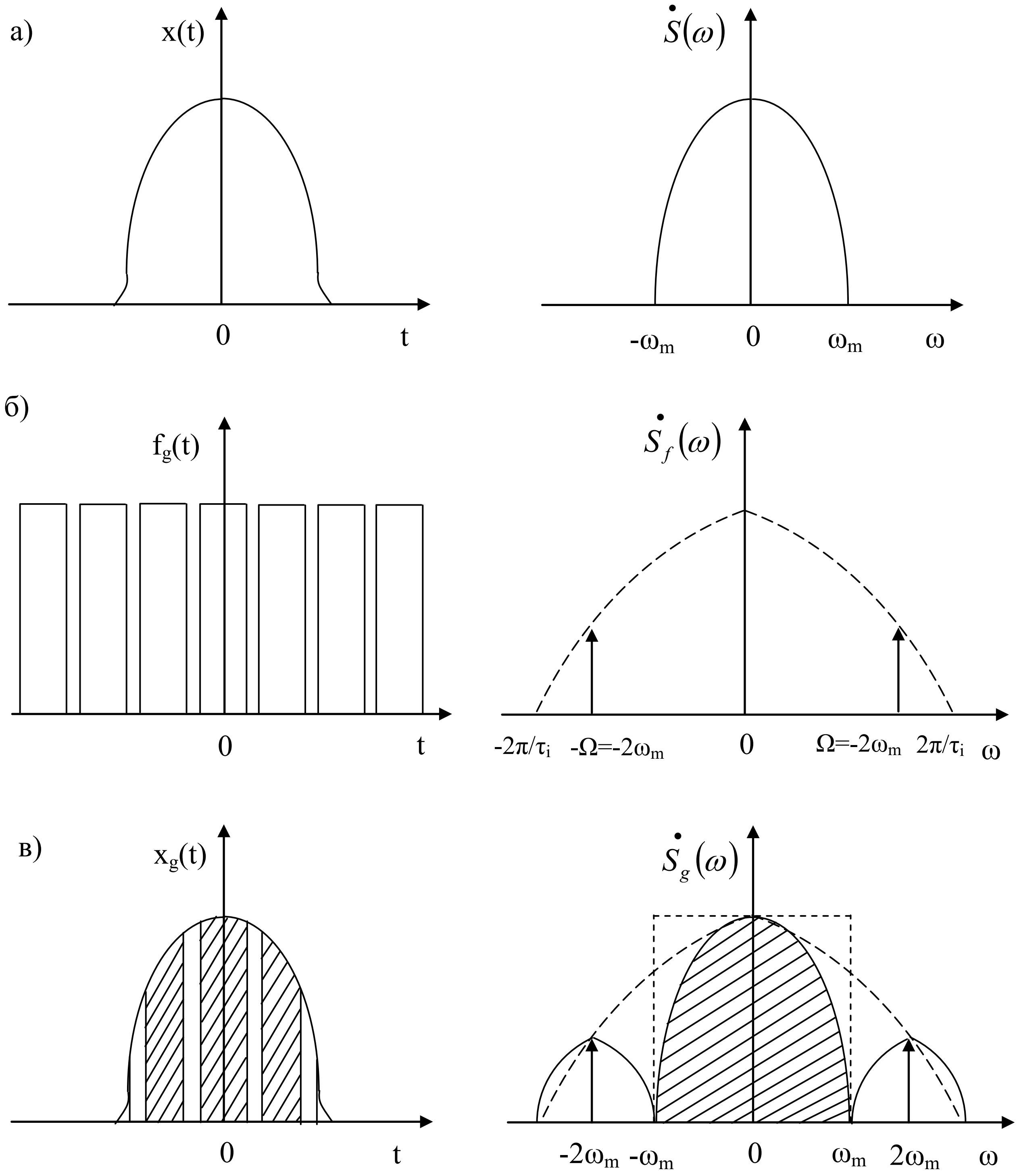


Рис. 7.12 - Ілюстрація формування спектра дискретизованого сигналу при $\Omega = 2\omega_m$

Якщо частота дискретизації $f = {}^{1}\!/_{T_g}$ дорівнює $2f_m$ відліків у секунду, то сусідні складового спектра $S_g(\omega)$ не перекриваються по частоті, як це показано на рис. 7.12 в. При цьому можна відновити безперервне коливання $x(t)$ з дискретизованого сигналу $x_g(t)$, виділивши центральну частину спектра $S_g(\omega)$ за допомогою ідеального фільтра нижніх частот (ФНЧ) зі смугою пропускання $(-\omega_m \cdots \omega_m)$. Але, як відомо, ідеальний фільтр нижніх частот, що має прямокутну амплітудно-частотну характеристику, фізично нереалізуємий. Тому на практиці частоту дискретизації вибирають більше, ніж $2\omega_m$.

7.2.4.2. Спектр дискретизованого сигналу за умови, що частота дискретизації більше, ніж у два рази, верхньої частоти в спектрі сигналу

Якщо частота дискретизації більше $2f_m$ відліків у секунду, тобто $\Omega > 2\omega_m$, то сусідні пелюстки спектра $S_g(\omega)$ розсовуються (рис. 7.13). Тоді центральна частина спектра може бути виділена ФНЧ, що має частотну характеристику з кінцевою крутістю зрізу (рис. 7.13). Звичайно обмежуються частотою дискретизації в 2-5 разів більшої верхньої частоти спектра сигналу $x(t)$.

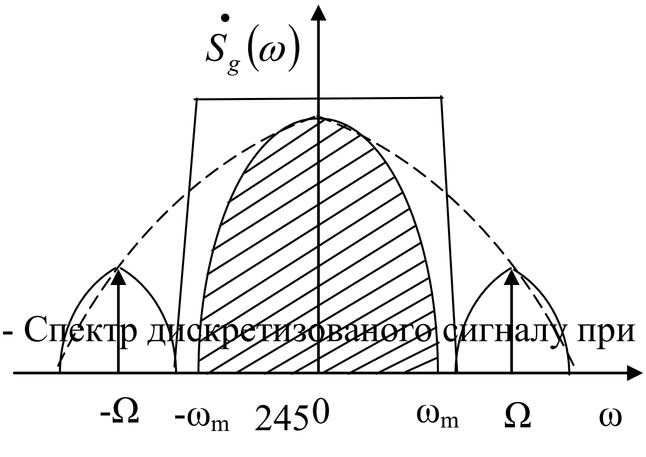


Рис. 7.13 - Спектр дискретизованого сигналу при $\Omega > 2\omega_m$

7.2.4.3. Спектр дискретизованого сигналу за умови, що частота дискретизації не більше, ніж у два рази, верхньої частоти в спектрі сигналу

Якщо частота дискретизації менше $2f_m$ відліків у секунду, тобто $\Omega < 2\omega_m$, то сусідні пелюстки спектра $\dot{S}_g(\omega)$ перетинаються (рис. 7.14).

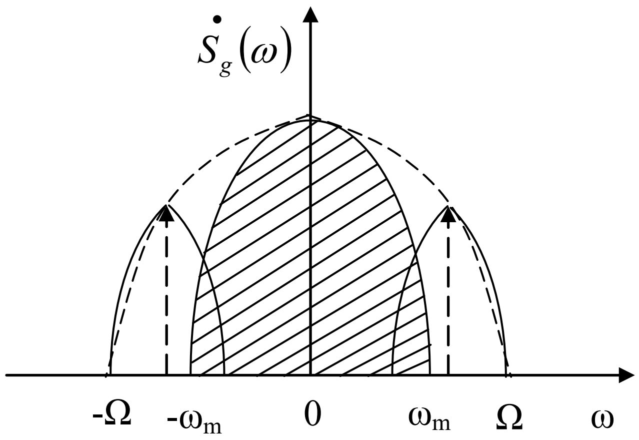


Рис. 7.14 - Спектр дискретизованого сигналу при $\Omega < 2\omega_m$

У цьому випадку відновлення сигналу стає неможливим.

7.3. Відновлення неперервного сигналу з дискретизованого

7.3.1. Загальні положення

При аналізі дискретизації розрізняють „фізичну" і „аналітичну" дискретизацію [2].

При „фізичній” дискретизації сигналу на виході аналогових циклічних перетворювачів у моменти t_i одержують відповідні фізичні вибірки сигналу $x(t_i)$; таке перетворення в теорії сигналів називають амплітудно - імпульсним.

При „аналітичній” дискретизації на виході цифрових приладів одержують числові значення вимірюваної величини x_{Ni} у відповідні моменти часу t_i.

У дискретизованому сигналі відсутні проміжні значення, що утримувалися в безперервному сигналі. Для багатьох операцій керування, для перетворення виду сигналу принципово необхідний безперервний сигнал. Тому дискретизований сигнал у багатьох випадках знову необхідно перетворити в безперервний, тобто відновити в ньому всі його проміжні значення.

7.3.2. Види відновлення безперервного сигналу з дискретизованого

Таким чином, виникають **два випадки відновлення безперервного сигналу з дискретизованого:**

1) за фізичним дискретизованим в часі сигналом;
2) за відомими числовими значеннями дискретизованого сигналу у відповідні моменти дискретизації t_i.

Перший випадок характерний головним чином для пристроїв техніки зв'язку і реалізується шляхом відновлення фізичних проміжних значень величини, другий характерний для цифрових вимірювальних пристроїв.

В другому випадку приблизно відновлюються, тобто апроксимуються, числові значення величини в проміжні моменти часу. Відновлення сигналу в обох випадках повинне проводиться з заданою похибкою.

Розглянемо більш докладно другий випадок відновлення. При відновленні сигналу необхідно насамперед попередньо підібрати для даної ділянки сигналу відновлюючу базисну функцію. При цьому відновлюваний сигнал звичайно виражається сумою базисних функцій:

$$x_{ВІДН}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_iC_i(t), \tag{7.29}$$

де $C_i(t)$ - деяка система базисних функцій, що звичайно є ортогональною або ортонормованою; a_i - коефіцієнти ряду.

Коефіцієнти ряду a_i і базисних функцій можуть вибиратися на основі різних критеріїв, наприклад за мінімумом середньої квадратичної похибки або за критерієм збігу відновлюваного безперервного сигналу з миттєвими значеннями дискретизованого сигналу.

Координати часу базисних функцій можуть змінюватися в широкому діапазоні, наприклад, на всьому протязі інтервалу T - часу реалізації даного сигналу або тільки протягом одного або декількох інтервалів дискретизації $T_Д$. Природно, що базисні функції підбираються насамперед з умов найбільшої простоти їхньої реалізації, при цьому бажано також, щоб коефіцієнти ряду a_i визначалися б найпростішим способом за параметрами дискретизованого сигналу, зокрема, за миттєвим значенням дискретизованого сигналу.

Функцією відновлення, що найбільш часто застосовується, є ряд В.А. Котельникова, що далі буде розглянутий докладніше.

Часто зустрічається ситуація, коли як базисні функції використовуються ступеневі поліноми (східчаста, кусочно - лінійна, параболічна апроксимації). Ці види апроксимації набутили широкого застосування у вимірювальній техніці, тому що вони зручні для аналітичного відновлення за допомогою ЕОМ на основі числових результатів вимірювання параметрів дискретизованого сигналу.

7.3.3. Відновлення дискретизованого сигналу за допомогою ряду Котельникова

Відповідно до теореми Котельникова **безперервний сигнал** $x(t)$**, у спектрі якого не містяться частоти вище** f_m**, цілком визначається послідовністю своїх миттєвих значень, відлічених через інтервал часу** $T_Д = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$ **і може бути представлений рядом**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_Д) \frac{\sin \omega_m (t - nT_Д)}{\omega_m (t - nT_Д)}. \tag{7.30}$$

Ряд (7.30) називають рядом Котельникова. Якщо представити (7.30) у наступному виді:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_Д) \cdot \eta_n (t - nT_Д), \tag{7.31}$$

$$\eta_n (t - nT_Д) = \frac{\sin \omega_m (t - nT_Д)}{\omega_m (t - nT_Д)}, \tag{7.32}$$

то (відповідно до виразу (7.29) $\eta_n(t - nT_Д)$ - система базисних функцій, а $x(nT_Д)$- коефіцієнти ряду.

Система базисних функцій ортогональна на інтервалі часу $(-\infty, \infty)$, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_n(t) \cdot \eta_l(t) dt = \begin{cases} 0, & при \quad n \neq l; \\ T, & при \quad n = l. \end{cases} \tag{7.33}$$

Вираз (7.33) – це вираз для енергії базисної функції. При $n \neq l$ вираз (7.33) відповідає взаємній енергії. Так як взаємна енергія дорівнює нулеві, то система базисних функцій ортогональна.

Кожна з базисних функцій $\eta_n(t)$ зсунена щодо найближчої функції $\eta_{n+1}(t)$ і $\eta_{n-1}(t)$ на час

$$T_Д = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m},$$

що відповідає часовому інтервалові дискретизації між двома відліковими точками, що іноді називають інтервалом Найквіста.

Функція $\eta_n(t)$, зображена на рис. 7.15 має властивість

$$\eta_n(t = nT_Д) = \begin{cases} 1, & при \quad n = k; \\ 0, & при \quad n \neq k, \end{cases} \tag{7.34}$$

де k - будь-яке ціле позитивне або від’ємне число.

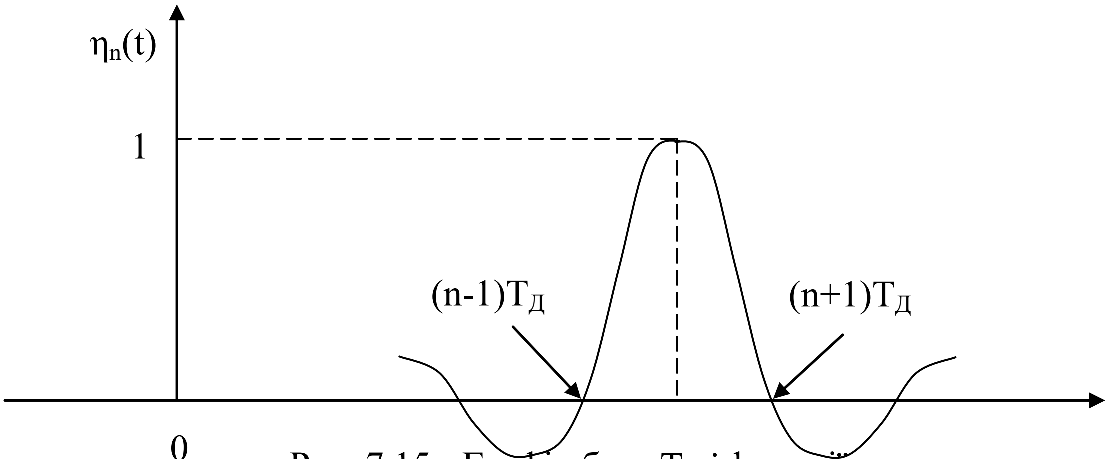


Рис. 7.15 - Графік базисної функції

Рис. 7.16 пояснює апроксимацію безперервного сигналу $x(t)$ рядом Котельникова. На графіку побудовані три члени ряду (7.30), що відповідають відлікам функції $x(t)$ у моменти часу $t = 0$, $t = T_Д$, $t = nT_Д$. При додаванні цих членів ряду в точках відліків ($t = 0$, $t = T_Д$, $t = nT_Д$) одержуємо точні значення сигналу $x(t)$. Отже, у відлікові моменти часу $t = nT_Д$ безперервний сигнал апроксимується точно незалежно від числа взятих відліків, тобто від числа членів ряду Котельникова. Між відліками ($t \neq nT_Д$) сигнал $x(t)$ апроксимується точно тільки в тому випадку, коли додаються всі члени ряду (7.30) і дотримується умова сформульована в теоремі Котельникова.

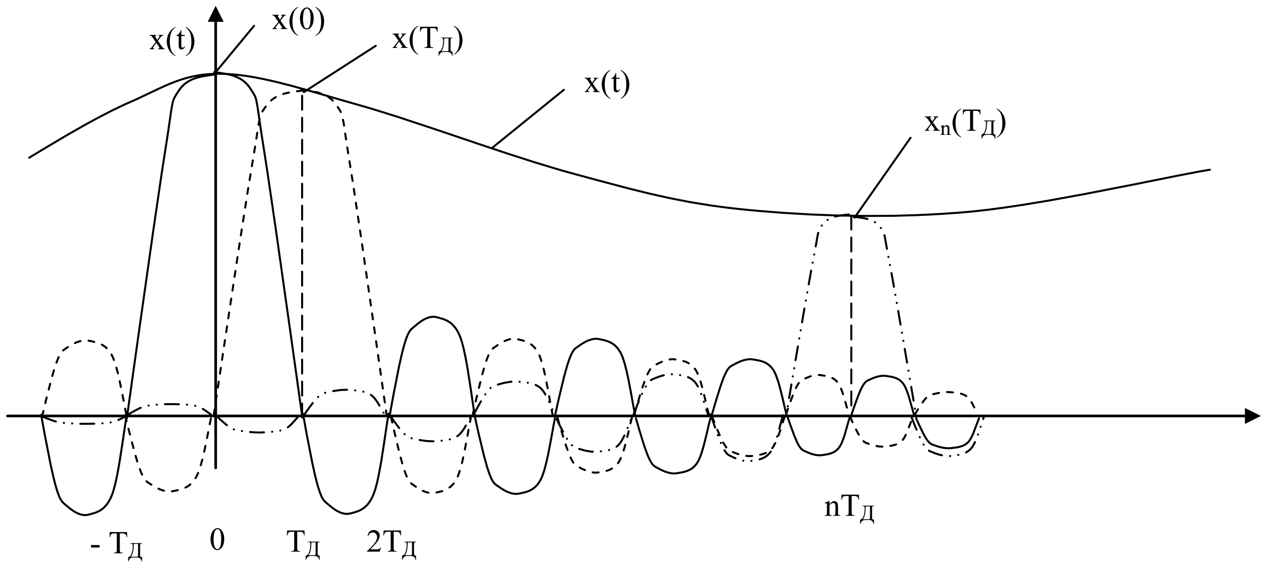


Рис. 7.16 - Апроксимація безперервного сигналу рядом Котельникова

Відповідно до формули (7.30) ряд Котельникова може використовуватися для відновлення безперервного сигналу без похибок. Однак у реальній ситуації похибки виникають. Розглянемо їхні джерела. На практиці ряд Котельникова обмежений. Сигнал, обмежений у часі приблизно описується рядом (7.35), що складається з кінцевого числа членів:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{N=2f_mT} x(nT_Д) \frac{\sin \omega_m (t - nT_Д)}{\omega_m (t - nT_Д)} . \tag{7.35}$$

При додаванні членів ряду (7.35) сигнал $x(t)$ відтворюється точно тільки в точках відліків $nT_Д$. У проміжках між відліками виникає похибка апроксимації, що виникає в краях інтервалу T, де відкинуті члени ряду мають найбільше значення.

Другим джерелом похибки є те, що реальні сигнали обмежені в часі і, отже, володіють необмеженим по частоті спектром (рис. 7.17). Однак поза деякою смугою частот $-\omega \div \omega_m$ складові реальних сигналів мають малу енергію в порівнянні з енергією сигналу $x(t)$. Такі сигнали можна приблизно вважати обмеженими за часом і по частоті і представляти рядом Котельникова. Це наближення є джерелом похибки.

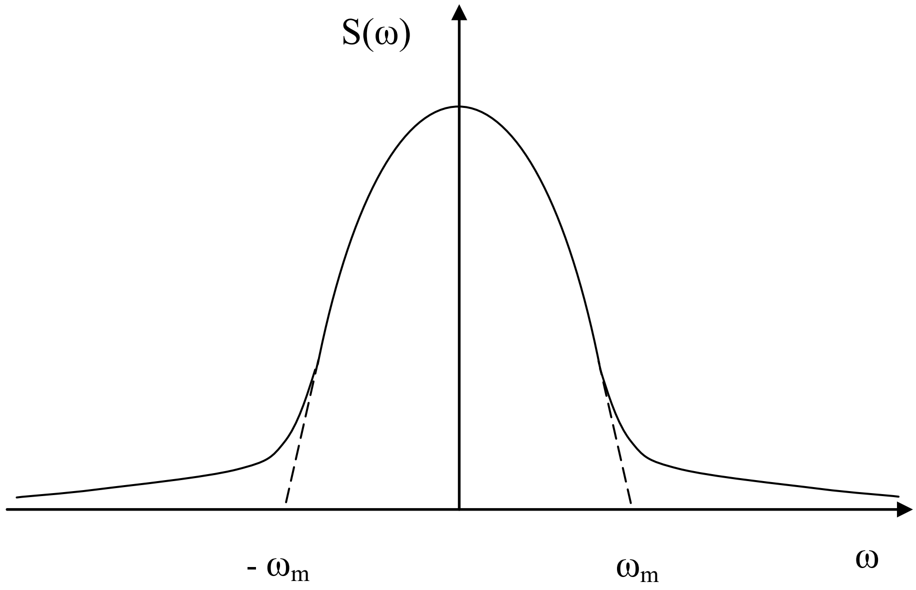


Рис. 7.17 - Наближене подання сигналу, обмеженого за часом і частотою

Третім джерелом похибки є неідеальність дискретизації, що полягає в тому, що значення $x(nT_Д)$ відповідає не моментові часу (функція дискретизації – послідовність δ - функцій), а невеликому інтервалові з тривалістю τ_i (функція дискретизації – послідовність прямокутних імпульсів).

7.3.4. Відновлення дискретизованого сигналу за допомогою ступеневих поліномів, похибки апроксимації, визначення частоти дискретизації

7.3.4.1. Види апроксимації, похибка апроксимації

При апроксимації сигнал $x_Д(t)$ на кожній ділянці між його відомими значеннями заміняється кривою, що змінюється за визначеним законом:

1) горизонтальною прямою, при східчастій апроксимації;

2) відрізком похилої прямої, при кусочно-лінійній апроксимації;

3) ділянкою параболи, при параболічній апроксимації.

Різниця між апроксимованими, тобто відновленими і дійсними проміжними значеннями функції *x*(*t*) називають похибкою апроксимації.

Таким чином, похибка апроксимації визначається виразом

$$\Delta_{\text{АП}}(t) = x_{\text{В}}(t) - x(t). \tag{7.36}$$

Похибка від апроксимації залежить від:

1) швидкості зміни $x(t)$;

2) способу апроксимації;

3) інтервалу дискретизації.

Похибка апроксимації збільшується зі збільшенням швидкості зміни сигналу, зменшується з ускладненням виду апроксимації, збільшується зі збільшенням інтервалу дискретизації. Приклади апроксимації приведені на рис. 7.18.

7.3.4.2. Східчаста апроксимація

При **східчастій апроксимації** використовується ступеневий поліном нульового порядку, тобто апроксимація виробляється відрізком горизонтальної прямої, що починається з моменту вимірювання, що передує інтервалові відновлення.

$$\Delta_{\text{АП}}(t) = x_{\text{В}}(t) - x(t) = x_{\text{К1}} - x(t). \tag{7.37}$$

Максимальне значення похибки від апроксимації $\Delta_{\text{АП}m}$ в цьому випадку буде на найбільш крутій ділянці функції, де перша похідна досягає найбільшого значення.

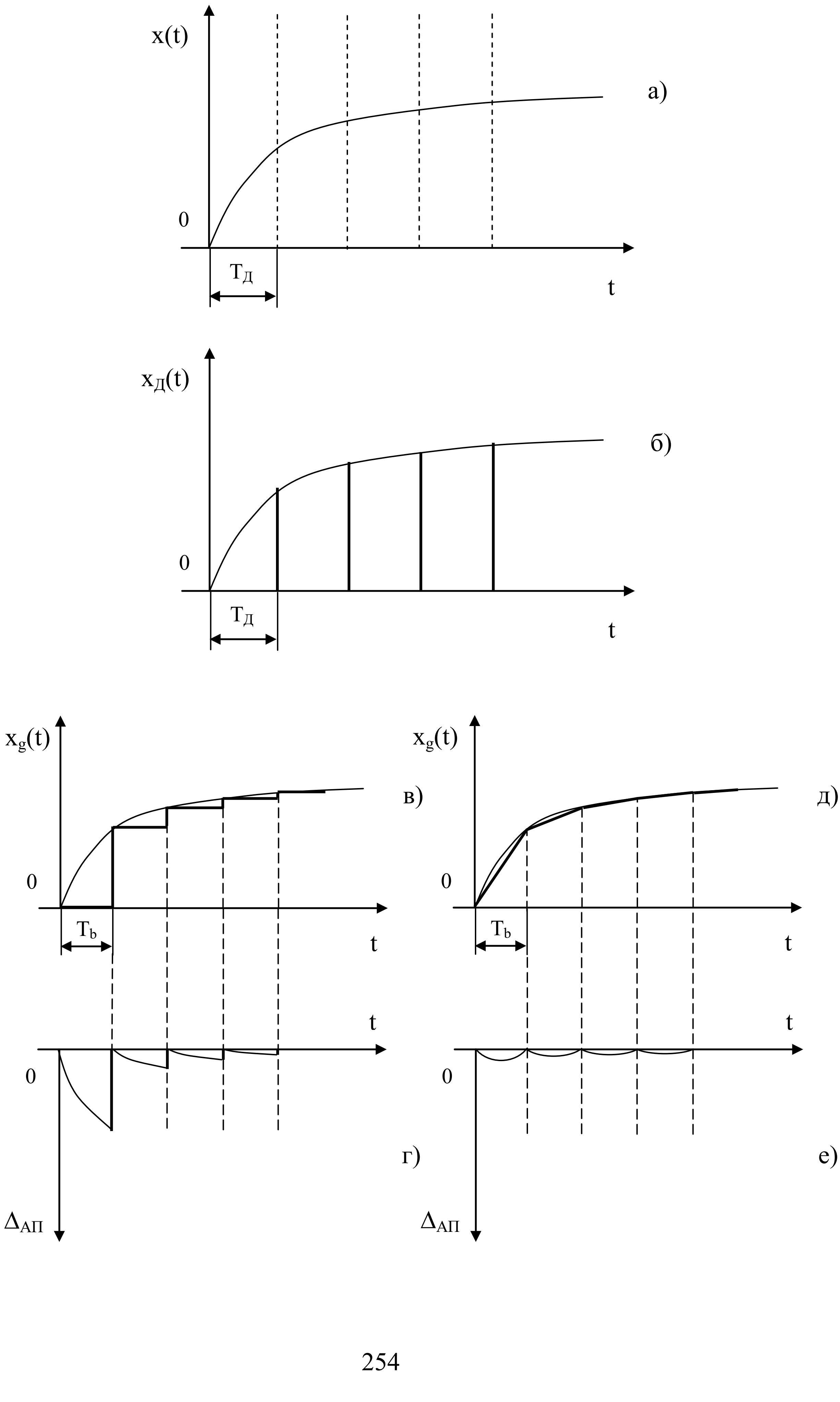

x(t)
а)
0
TД
t
xД(t)
б)
0
TД
t
xg(t)
в)
0
Tb
t
t
0
г)
ΔАП
xg(t)
д)
0
Tb
t
t
0
е)
ΔАП

Рис. 7.18 - Приклади апроксимації: а) вихідний сигнал; б) дискретизований сигнал; в) сигнал, відновлений за допомогою східчастої апроксимації; д) сигнал, відновлений за допомогою кусочно - лінійної апроксимації; г), е) – графіки похибок апроксимації.

$$\Delta_{\text{АП}m} = x'_m(t) \cdot T_{\text{Д}}. \qquad (7.38)$$

Вираз (7.38) може бути використаний для розрахунку необхідної частоти дискретизації $f_{\text{Д}} = \dfrac{1}{T_{\text{Д}}}$ при заданій моделі сигналу.

Приклад 1

Якщо прийняти для розрахунку $f_{\text{Д}}$ модель Берштейна, що справедлива для стаціонарних випадкових функцій з рівномірним спектром у смузі частот сигналу від 0 до ω_C, то $|x'_m(t)| \leq \omega_C \cdot x_m$, де x_m - максимальне значення амплітуди сигналу.

Тоді $\Delta_{\text{АП}m} = \omega_C \cdot x_m \cdot T_{\text{Д}}$, а приведена похибка апроксимації дорівнює:

$$\gamma_{\text{АП}m} = \frac{\Delta_{\text{АП}m}}{x_m} = \omega_C \cdot T_{\text{Д}}.$$

Тоді при заданій похибці апроксимації $\gamma_{\text{АП}m}$ частота дискретизації дорівнює $f_{\text{Д}} = \dfrac{\omega_C}{\gamma_{\text{АП}m}}$.

Тобто, при $\gamma_{\text{АП}m} = 1\%$; $f_{\text{Д}} = 100\,\omega_C = 628 f_C$.

Таким чином, при використанні моделі Бернштейна при похибці апроксимації 1 % частота дискретизації повинна бути в 628 разів більше частоти сигналу.

Приклад 2

Вважають, що використання моделі Бернштейна приводить до завищених вимог до частоти дискретизації. Якщо прийняти більш реальну модель, коли амплітуди гармонійних складових з номером n мають амплітуду, обернено пропорційну їх номеру, то вираз для частоти дискретизації має вигляд:

$$f_{\text{Д}} = \frac{\omega_{Cn} \cdot x_m}{\Delta_{\text{АП}m}} = \frac{n \cdot \omega_{C1} \cdot x_m}{n \cdot \Delta_{\text{АП}m}} = \frac{\omega_{C1}}{\gamma_{\text{АП}m}},$$

де ω_{C1} - частота першої гармоніки сигналу.

Для порівняння різних видів апроксимації будемо знаходити необхідну частоту дискретизації для однієї моделі сигналу – синусоїдальної.

При синусоїдальній моделі сигналу $x(t) = U_m \cdot \sin(\omega t)$ з використанням (8.38) одержуємо:

$$\Delta_{\text{АП}m} = \omega U_m \cdot \cos(\omega t)\Big|_{t=0} \cdot T_{\text{Д}} = \omega U_m \cdot T_{\text{Д}}. \tag{7.39}$$

Тоді частота дискретизації $f_{\text{Д}}$ дорівнює

$$f_{\text{Д}} = \frac{\omega \cdot U_m}{\Delta_{\text{АП}m}} = \frac{\omega}{\gamma_{АПm}} = \frac{2\pi f}{\gamma_{\text{АП}m}}. \tag{7.40}$$

При похибці апроксимації $\gamma_{\text{АП}m} = 1$ %; і синусоїдальній моделі сигналу вимоги до необхідної частоти дискретизації виглядають таким чином $f_{\text{Д}} = 628 f$.

7.3.4.3. Кусочно - лінійна апроксимація

При використанні ступеневих поліномів першого порядку крива в проміжку між двома відомими значеннями апроксимується відрізком прямої. Така апроксимація називається **кусочно-лінійною. Похибка при цьому буде найбільшою на тих ділянках зміни функції, де друга похідна досягає найбільшого значення.**

При синусоїдальній моделі сигналу похибка $\Delta_{АП}(t)$ буде найбільшою в зоні максимуму (рис. 7.19).

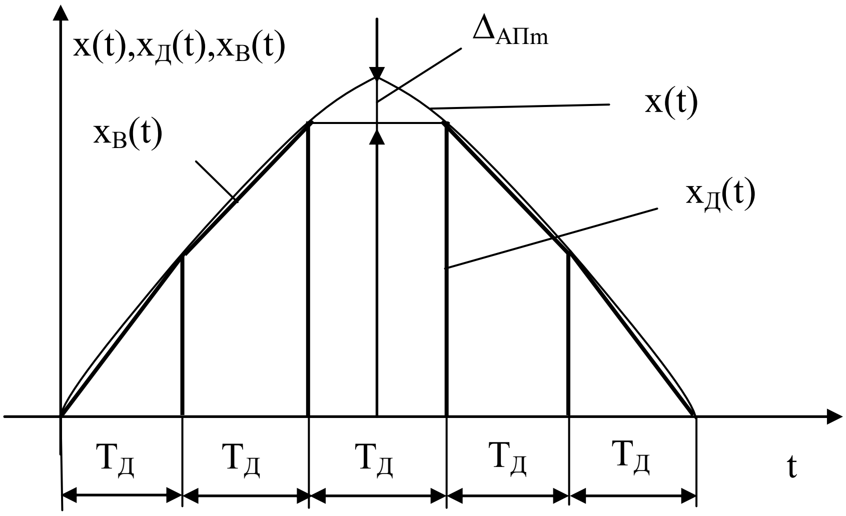


Рис. 7.19 - Похибка апроксимації при кусочно - лінійній апроксимації

$$\Delta_{АПm} = x_m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_{\partial}}{2}\right) - x_m = x_m \cdot \cos\frac{\omega T_{\partial}}{2} - x_m \,. \tag{7.41}$$

Після перетворень у виразі (7.41) одержуємо

$$\Delta_{АПm} = x_m \cdot \left(\cos\frac{\omega T_Д}{2} - 1\right) = -2x_m \cdot \sin^2\left(\frac{\omega T_Д}{4}\right),$$

$$\left|\Delta_{АПm}\right| = 2x_m \cdot \sin^2\frac{\omega T_Д}{4}$$

Якщо прийняти через малість $\frac{\omega T_Д}{4}$, що $\sin\frac{\omega T_Д}{4} \approx \frac{\omega T_Д}{4}$, одержуємо:

$$\left|\Delta_{АПm}\right| = x_m \cdot \frac{2\omega^2 T_Д^2}{16}; \qquad \left|\gamma_{АПm}\right| = \frac{\omega^2 T_Д^2}{8} \,. \tag{7.42}$$

Тоді вимога до частоти дискретизації при заданій похибці апроксимації $\gamma_{АПm}$ при синусоїдальній моделі сигналу може бути сформульована на підставі (7.43) таким чином:

$$f_{\text{Д}} = \pi f \sqrt{\frac{1}{(2\gamma_{\text{АП}m})}}\,. \tag{7.43}$$

Для $\gamma_{\text{АП}m} = 1\,\%$; з (7.43) одержуємо $f_{\text{Д}} = 22f$.

Якщо порівняти результати розрахунку $f_{\text{Д}}$ для східчастої і кусочно-лінійної апроксимації при синусоїдальній моделі сигналу, то видно, що виграш у швидкодії при кусочно-лінійній апроксимації дуже великий.

7.3.4.4. Параболічна апроксимація

Якщо здійснено параболічну апроксимацію, то необхідна частота дискретизації складе

$$f_{\text{Д}} = \sqrt[3]{\frac{x'''(t)}{16\Delta_{\text{АП}m}}}\,. \tag{7.44}$$

де $x'''_m(t)$ - максимум третьої похідної сигналу $x(t)$.

Для синусоїдальної моделі сигналу при $\gamma_{\text{АП}m} = 1$ %; на підставі (7.44) одержуємо $f_{\text{Д}} = 11f$, отже, при параболічній апроксимації для заданих умов частота дискретизації в порівнянні з кусочно - лінійною апроксимацією знижується тільки в два рази при значному ускладненні апаратури.

При застосуванні для апроксимації поліномів більш високого порядку виграш у швидкодії стає ще менше. Тому на практиці апроксимація складніше параболічної не використовується.

Таблиця 1. Таблиця Функцій Лапласа

Значення інтегралу

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \; z = \frac{\Delta}{\sigma[\Delta]}.$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,66	0,2454	1,32	0,4066	2,00	0,4772
0,02	0,0080	0,68	0,2517	1,34	0,4099	2,04	0,4793
0,04	0,0160	0,70	0,2580	1,36	0,4131	2,08	0,4812
0,06	0,0239	0,72	0,2642	1,38	0,4162	2,12	0,4830
0,08	0,0319	0,74	0,2703	1,40	0,4192	2,16	0,4846
0,10	0,0398	0,76	0,2764	1,42	0,4222	2,20	0,4861
0,12	0,0478	0,78	0,2823	1,44	0,4251	2,24	0,4875
0,14	0,0557	0,80	0,2881	1,46	0,4279	2,28	0,4887
0,16	0,0636	0,82	0,2939	1,48	0,4306	2,32	0,4898
0,18	0,0714	0,84	0,2995	1,50	0,4332	2,36	0,4909
0,20	0,0793	0,86	0,3051	1,52	0,4357	2,40	0,4918
0,22	0,0871	0,88	0,3106	1,54	0,4382	2,44	0,4927
0,24	0,0948	0,90	0,3159	1,56	0,4406	2,48	0,4934
0,26	0,1026	0,92	0,3212	1,58	0,4429	2,52	0,4941
0,28	0,1103	0,94	0,3264	1,60	0,4452	2,56	0,4948
0,30	0,1179	0,96	0,3315	1,62	0,4474	2,60	0,4953
0,32	0,1255	0,98	0,3365	1,64	0,4495	2,64	0,4959
0,33	0,1293	0,99	0,3389	1,66	0,4515	2,68	0,4963
0,35	0,1368	1,01	0,3438	1,68	0,4535	2,72	0,4967
0,37	0,1443	1,03	0,3485	1,70	0,4554	2,76	0,4971
0,39	0,1517	1,05	0,3531	1,72	0,4573	2,80	0,4974
0,41	0,1519	1,07	0,3577	1,74	0,4591	2,84	0,4977
0,43	0,1664	1,09	0,3621	1,76	0,4608	2,88	0,4980
0,45	0,1736	1,11	0,3665	1,78	0,4625	2,92	0,4982
0,47	0,1808	1,13	0,3708	1,80	0,4641	2,96	0,4985
0,49	0,1879	1,15	0,3749	1,82	0,4656	3,00	0,49865
0,51	0,1950	1,17	0,3790	1,84	0,4671	3,40	0,49966
0,53	0,2019	1,19	0,3830	1,86	0,4688	3,80	0,49998
0,57	0,2157	1,23	0,3907	1,90	0,4713	5,00	0,5
0,59	0,2224	1,25	0,3944	1,92	0,4726		
0,61	0,2291	1,27	0,3980	1,94	0,4728		
0,63	0,2357	1,29	0,4015	1,96	0,4750		
0,65	0,2422	1,31	0,4049	1,98	0,4761		

Таблиця 2. Значення коефіцієнтів Стьюдента для заданої ймовірності.

Число ступенів вільності (n – 1)	Ймовірність p = 0,95	Ймовірність p = 0,99	Число ступенів вільності (n – 1)	Ймовірність p = 0,95	Ймовірність p = 0б99
3	3,182	5,841	14	2,145	2,977
4	2,776	4,604	16	2,120	2,921
5	2,571	4,032	18	2,101	2,878
6	2,447	3,707	20	2,086	2,845
7	2,365	3,499	22	2,074	2,819
8	2,306	3,355	24	2,064	2,797
9	2,262	3,250	26	2,056	2,779
10	2,228	3,169	28	2,048	2,763
11	2,201	3,106	30	2,042	2,750
12	2,179	3,055	60	2,000	2,660

Таблиця 3. Значення коефіцієнта M(ν)

ν	M(ν)	ν	M(ν)	ν	M(ν)
1	1,253	10	1,025	19	1,013
2	1,128	11	1,023	20	1,013
3	1,085	12	1,021	25	1,010
4	1,084	13	1,019	30	1,008
5	1,051	14	1,018	35	1,007
6	1,042	15	1,017	40	1,006
7	1,036	16	1,016	45	1,006
8	1,032	17	1,015	50	1,005
9	1,028	18	1,014	60	1,004

Таблиця 4. Значення коефіцієнта $\alpha_q(\nu)$

ν	$q=0{,}975$	$q=0{,}025$	ν	$q=0{,}975$	$q=0{,}025$
1	0,446	31,91	21	0,765	1,43
2	0,521	6,28	22	0,773	1,42
3	0,566	3,73	23	0,777	1,40
4	0,599	2,87	24	0,782	1,39
5	0,624	2,45	25	0,784	1,38
6	0,644	2,20	26	0,788	1,37
7	0,661	2,04	27	0,791	1,36
8	0,675	1,92	28	0,794	1,35
9	0,688	1,83	29	0,796	1,34
10	0,699	1,75	30	0,799	1,34
11	0,707	1,70	35	0,811	1,30
12	0,717	1,65	40	0,821	1,28
13	0,725	1,61	45	0,829	1,26
14	0,732	1,58	50	0,837	1,24
15	0,739	1,55	51	0,849	1,22
16	0,745	1,52	70	0,858	1,20
17	0,750	1,50	80	0,866	1,18
18	0,756	1,48	90	0,873	1,17
19	0,760	1,46	100	0,879	1,16
20	0,765	1,44			

Таблиця 5. Квантилі розподілу $\nu_T(q,n)$

Кількість вимірювань	Рівень значущості	
	$q=0{,}01$	$q=0{,}05$
4	0,31	0,39
6	0,28	0,44
8	0,33	0,49
10	0,37	0,53
12	0,41	0,56
14	0,45	0,59
16	0,47	0,61
18	0,50	0,63
20	0,52	0,65
22	0,54	0,66
24	0,56	0,68
30	0,60	0,71
35	0,62	0,73
40	0,65	0,75
50	0,68	0,77
60	0,71	0,79

Таблиця 6. Квантилі розподілу $F_{0,05}$

Кількість ступенів свободи f_2	Кількість ступенів свободи f_1									
	2	3	4	5	6	8	12	16	60	∞
2	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19.4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,69	8,58	8,53
4	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,70	5,63
5	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,44	4,37
6	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,75	3,67
7	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,32	3,23
8	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,02	2,93
9	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,99	2,80	2,71
10	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,83	2,64	2,54
15	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,38	2,18	2,07
20	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	1,97	1,84
25	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,84	1,71
30	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,76	1,62
35	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,70	1,57
40	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,66	1,51
45	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,63	1,48
50	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,60	1,44
∞	3,00	2й,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,95	1,64	1,35	1,00

Таблиця 6. Квантилі розподілу $F_{0,01}$

Кількість ступенів свободи f_2	Кількість ступенів свободи f_1									
	2	3	4	5	6	8	12	16	60	∞
2	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5
3	30,8	29,4	28,7	28,2	27,9	27,5	26,8	26,6	26,4	26,1
4	18.0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,2	13,9	13,7	13,5
5	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,68	9,47	9,24	9,02
6	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8.10	7,52	7,31	7,09	6,88
7	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,28	6,07	5,86	5,65
8	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,48	5,28	5,07	4,86
9	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	4,92	4,73	4,52	4,31
10	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,52	4,33	4,12	3,91
15	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,49	3,29	3,08	2,87
20	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,05	2,86	2,64	2,42
25	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,32	2,81	2,62	2,40	2,17
30	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,66	2,47	2,25	2,01
35	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,56	2,37	2,13	1,90
40	5,18	4,31	3,83	3,51	3,20	2,99	2,48	2,29	2,06	1,80
45	5,11	4,25	3,77	3,45	3.23	2,94	2,43	2,23	1,99	1,75
50	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,38	2,18	1,95	1,68
∞	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,00	1,79	1,52	1,00

Список літератури

1. **JCGM 200: 2008.** International vocabulary of metrology –Basic and general concepts and associated terms (VIM). Joint Committee on Guides for Metrology (JCGM), 2008. [Електронний ресурс]. Режим доступу:

   http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2008.pdf

2. **Орнатский П.П.** Вступ до методології науки про вимірювання: Навчальний посібник. / П.П. Орнатський. - К.: ІСДО, 1994 –160 с.
3. **Орнатский П.П.** Теоретические основы информационно-измерительной техники /П.П. Орнатський. - Киев: Вища школа, 1984 – 2 изд. 456 с.
4. **Finkelstein L.** Theory and philosophy of measurement. In: Handbook of measurement science, Ed by P. Sydenham. J. Wiley, Chichester and New York, 1982.
5. **ДСТУ 2681-94.** Метрологія. Терміни та визначення. – Введ. 1995-01-01. - К.: Держстандарт України, 1994. – 68 с.
6. **Ціделко В.Д., Яремчук Н.А.** Невизначеність вимірювання. Обробка даних і надання результату вимірювання: Монографія. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2002 –176 с. ISBN 966-622-111-X.
7. **ДСТУ 3540-97.** Електронні засоби вимірювальної техніки для електричних та магнітних величин. Терміни та визначення. – Введ. 1998-01-01. - К.: Держстандарт України, 1997. – 46 с.
8. **ISO 704: 2009.** Terminology work - Principles and methods. [Електронний ресурс]. Режим доступу:

   http://www.iso.org/iso/home/store/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=38109.

9. **JCGM 100: 2008.** Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement, 2008. [Електронний ресурс]. Режим доступу:

http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf.

10. **Пфанцагль И.** Теория измерений / И. Пфангель. Пер. с англ. – М.: Мир, 1976 – 249 с.

11. **Мироновский П.А., Слаев В.А.** Инварианты в метрологии и технической диагностике / П.А. Мироновский, В.А. Слаев // Измерительная техника. – 1996. №6. – С. 3-14.

12. **Кривов А.С., Маринко С.В.** Измерения в системе информационных операций по исследованию свойств объектов / А.С. Кривов, С.В. Маринко // Измерительная техника. -1996. - №7. – С. 12-17.

13. **РМГ 83-2007.** Шкалы измерения. Термины и определения. – Введ. 2008-08-01. - М.: Стандартинформ, 2008. – 19 с.

14. **Ціделко В.Д., Яремчук Н.А.** Процедури експериментальної інформатики і шкали в інтелектуальних засобах вимірювань / В.Д. Циделко, Н.А. Яремчук // Вимірювальна техніка та метрологія. – 1999. - №54. – С. 37-41.

15. **Новицкий П.В., Зограф И.А.** Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. - 248 с.

16. **Ціделко В.Д., Яремчук Н.А., Дворжицька М.** Використання невизначеності при поданні результату вимірювання / В.Д. Ціделко, Н.А. Яремчук, М. Дворжицька // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2001. - №58.

17. **Бурдун Г.Д., Марков Б.Н.** Основы метрологии. Учебное пособие для вузов. Издание третье, переработанное – М.: Изд-во стандартов, 1985. - 226 с.

18. **Новицкий П.В., Зограф И.А., Лабунец В.Ф.** Динамика погрешностей средств измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф, В.Ф. Лабунец – Л.: Энергоатомиздат, 1990. -192 с.

19. **ДСТУ ГОСТ 8.401:2007** Классы точности средств измерений. Общие требования. Введ. 1981-07-01. – Издалетьство стандартов, 1981. – 13 с.

20. **ГОСТ 30012.1-2002.** Приборы аналоговые показывающие электроизмерительные прямого действия и вспомогательные части к ним. Часть 1. Определения и основные требования, общие для всех частей. – Введ. 2003-01-01. - Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003. – 28 с.

21. **Краузе В.** Конструирование приборов / В 2-х кн., под ред. В. Краузе; перевод с немецкого В.Н. Пальянова; под ред. О.Ф. Тищенко. Кн. 1 – М.: Машиностроение, 1987 - 384 с.

22. **МИ 2091-90.** Измерения физических величин. Общие требования. – Введ. 1992-01-01. - М. Коммитет стандартизации и метрологи СССР, 1991. – 68 с.

23. **Тейлор Дж.** Введение в теорию ошибок: / Дж. Тейлор, пер. с англ. – М.: Мир, 1985. - 272 с.

24. **В.Д.Циделко, Н.А.Яремчук** Оценивание суммарной погрешности измерительнах каналов ИИС в статическом режиме (при анализе и синтезе). Часть первая. К.; НТТУ (КПИ), 1997. - 97 с.

25. **МИ 1951-88.** Динамические измерения. Термины и определения. - М.: Из-во стандартов, 1990. - 17 с.

26. **МИ 2090-90.** Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения. - Введ. 1991-08-01. - М.: Из-во стандартов,1991, - 64 с.
27. **Васильев Д.В., Виталь М.Р., Горшенков Ю.Н.** Радиотехнические цепи и сигналы /Учеб., пособие для вузов. Д.В. Васильев, М.Р. Виталь, Ю.Н. Горшенков и др. Под ред.К.А.Самойло. - М: Радио и связь. 1982. - 528 с.