

Ю.М. Туз, Ю.С. Шумков, О.В. Козир

АВТОМАТИЗАЦІЯ АНАЛІЗУ ВИМІРЮ- ВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ

Монографія

За загальною редакцією д-ра техн. наук,
професора Ю.М. Туза

**Київ
"Корнійчук"
2014**

УДК 621.3: 621.38
ББК 31.2+32.85
Т81

Рецензенти: *І.В. Руженцев*, д-р техн. наук, проф.,
Харківський національний інститут радіоелектроніки;
Ю.В. Куц, д-р техн. наук, проф.,
Національний авіаційний університет.

Туз Ю.М.

Т81 Автоматизація аналізу вимірювальних пристроїв [Текст]:
Монографія / Ю. М. Туз, Ю. С. Шумков, О.В. Козир // За заг. ред.
Ю.М. Туза. – К.: "Корнійчук", 2014. – 172 с. – Бібліогр.: с. 171 . –
300 пр.

ISBN 966-954-654-0

У монографії розглянуто моделі вимірювальних пристроїв як об'єкту проектування та їх нормовані метрологічні характеристики. Викладено матричний апарат аналізу вимірювальних пристроїв, похибок перетворення. Розглянуто обчислення визначників у символному вигляді з використанням алгебри Грассмана, знаходження похідних визначників, розкладання визначників у ряд. Наведено приклади використання визначників в автоматизованому аналітичному аналізі електричних кіл. Розглянуто проектування вимірювальних перетворювачів підвищеної точності, функціональних перетворювачів. Наведено опис програмного пакету побудови матричних моделей і моделей похибок вимірювальних пристроїв. Розглянуто приклади аналізу характерних для вимірювальної техніки вузлів та пристроїв, які мають нелінійні та інерційні компоненти, на основі систем нелінійних диференціальних рівнянь.

Може бути корисною для фахівців, які спеціалізуються в галузі розробки засобів вимірювальної техніки та систем, а також для студентів технічних вузів і аспірантів.

УДК 621.3: 621.38
ББК 31.2+32.85

ISBN 966-954-654-0

© Ю.М. Туз, Ю.С. Шумков, О.В. Козир, 2014

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Вимірювальний пристрій як об'єкт проектування	6
1.1. Характеристики засобів вимірювань	6
1.2. Статична характеристика вимірювальних пристроїв	12
1.3. Детермінована модель похибок вимірювальних пристроїв	32
1.4. Стохастична модель похибок засобів вимірювання	40
1.5. Динамічні характеристики засобів вимірювань	45
1.6. Похибка визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі за результатами експерименту (похибка за наявності залежних елементів в матриці системи)	53
2. Обчислення визначників в символічному вигляді	59
2.1. Знаходження визначників з використанням алгебри Грассмана	59
2.2. Похідні визначників. Розкладання визначників у ряд	68
3. Визначники та автоматизований аналітичний аналіз електричних кіл	75
4. Проектування перетворювачів підвищеної точності	88
5. Проектування функціональних перетворювачів	102
6. Програма автоматизованого аналізу вимірювальних пристроїв ПААВП	109
6.1. Опис програми ПААВП	109
6.2. Приклад аналізу	120
7. Моделювання вимірювальних пристроїв на основі нелінійних диференціальних рівнянь	122
7.1. Дослідження динаміки перетворювачів амплітудних значень змінної напруги	122
7.2. Дослідження динаміки лінійного перетворювача середньоквадратичних значень змінної напруги	153
Список літератури	171

ВСТУП

Вимірювальні пристрої на відміну від інших технічних пристроїв відрізняються нормованими метрологічними характеристиками, закріпленими міжнародними, державними та галузевими стандартами. Найважливішими характеристиками є функції перетворення вимірюваних величин в їх значення та похибки вимірювання. Процес проектування вимірювальних пристроїв передбачає створення на основі попереднього досвіду структурних, функціональних та принципівих схем. Для їх опису створюють рівняння перетворення та рівняння похибок. Оскільки методика загального синтезу вимірювальних пристроїв і їх оптимізація не достатньо розвинута, то оцінка відповідності спроектованого пристрою проводиться шляхом аналізу ряду варіантів, внесення змін і повторного аналізу до отримання найбільш оптимального рішення. Тому автоматизація процесу аналізу стає особливо актуальною. На сьогодні пропонується декілька програмних пакетів моделювання електричних схем з широкою базою компонентів. Як правило результатом моделювання є масиви даних або графічні залежності. В той же час аналітичні моделі є більш змістовними для подальшого аналізу, оптимізації та оцінки отриманих результатів.

Найбільш перспективними з точки зору автоматизації аналізу видаються матричні рівняння через можливість кодування змінних за місцем їх знаходження і подальших переміщень відповідно до створених алгоритмів. Як відомо, матричні рівняння є апаратом, придатним для систем лінійних рівнянь. Для застосування їх для роботи з нелінійними блоками, розривними в часі структурними схемами врахований той факт, що в просторі інформаційних змінних рівняння з нелінійними членами можуть бути представлені шляхом заміни змінних у вигляді системи лінійних рівнянь і розв'язані через визначники у вигляді аналітичних залежностей.

Виходячи з властивостей визначників створені рівняння похибок в матричній формі з можливістю точного представлення сумарної похибки незалежно від розміру похибок складових структурної схеми. Також в матричній формі представлені рівняння з комплексними коефіцієнтами.

В монографії представлений програмний пакет, який дозволяє отримати аналітичні вирази рівнянь функцій перетворення та рівнянь похибок за заданою структурною схемою. Даний пакет спрощує побудову матричних моделей і моделей похибок вимірювальних пристроїв оскільки надає широку бібліотеку моделей вимірювальних перетворювачів і власне середовище графічної побудови структурних схем. Крім того можна розраховувати системи рівнянь в символічному вигляді. Виконавши один раз розрахунок символічних матриць і отримавши результат у вигляді рівняння змінних, не потрібно витрачати час на повторний розрахунок матриці (що для символічних матриць розміром більше 10×10 займає значний період часу), а просто виконуючи підстановку значень для змінних моделі швидко отримати результат. На відміну від інших універсальних пакетів моделю-

вання дана програм дозволяє як створення і редагування структурних схеми і їх аналіз, так і ручне заповнення матричних рівнянь без попереднього створення і ініціалізації змінних моделі, що значно спрощує процес аналізу і скорочує час на його проведення.

Наведені приклади аналізу характерних для вимірjuвальної техніки вузлів з лінійними і нелінійними блоками за допомогою поширених програмних пакетів.

Розділи 1, 2, 3, 4, 5 написані Тузом Ю. М. Розділ 7 написав Шумков Ю. С. Розділ 6 написав Козир О. В. Програмний пакет створив Козир О. В.

1. ВИМІРЮВАЛЬНИЙ ПРИСТРІЙ ЯК ОБ'ЄКТ ПРОЕКТУВАННЯ

Технологія проектування різних технічних об'єктів, незалежно від їхніх фізичних принципів роботи та призначення, складається з ряду етапів: визначення фізичного принципу дії для конкретних умов, вибору або пошуку найбільш раціонального технічного рішення при обраному принципі дії, визначення оптимальних значень параметрів обраного технічного рішення.

Проектування засобів вимірювань має свої особливості, які витікають з визначення засобу вимірювання (ДСТУ 2681-94. «Метрологія. Терміни та визначення»).

1.1. Характеристики засобів вимірювань

Засіб вимірювання – це технічний засіб, що використовується при вимірюванні та має нормовані метрологічні властивості. Ця особливість, яка регламентована ДСТУ ГОСТ 8.009:2008 "ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений", повинна бути відображена насамперед у моделі технічного об'єкту, що підлягає проектуванню.

Найважливіші характеристики засобів вимірювань, які можуть бути покладені в основу моделі, такі:

- номінальна статична характеристика перетворення вимірювального перетворювача $f_n(x)$, яка повинна виражатися у вигляді формули, графіка, таблиці;

- характеристики систематичної складової похибки Δ_C засобів вимірювань: межа Δ_{CD} допустимого значення систематичної складової похибки, межа Δ_{CD} допустимого значення, математичне очікування $M[\Delta_C]$ і середньоквадратичне відхилення $\sigma(\Delta_C)$ систематичної складової Δ_C похибки засобів вимірювань даного типу;

- характеристики випадкової складової Δ похибки засобів вимірювань: межа $\sigma_D(\Delta)$ допустимого значення середнього квадратичного відхилення випадкової складової похибки засобу вимірювання даного типу, нормована автокореляційна функція $r\Delta(\lambda)$, або спектральна густина $S\Delta(\omega)$ випадкової складової похибки засобів вимірювань даного типу;

- характеристики похибки Δ засобів вимірювань: межа Δ_D допустимого значення похибки засобів вимірювань даного типу: межа Δ_D допустимого значення, математичне очікування $M[\Delta]$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(\Delta)$ похибки засобів вимірювань даного типу (останні характеристики можуть застосовуватися для засобів вимірювань, найбільше зна-

чення середнього квадратичного відхилення $\alpha(\Delta)$ випадкової складової похибки яких не перевищує q у відсотках Δ_D , варіація b вихідного сигналу вимірювального перетворювача і варіація показань вимірювального приладу, нормовані межею допустимого значення b_D варіації засобів вимірювань даного типу.

Перераховані характеристики засобів вимірювань повинні виражатися числом або функцією (формулою, графіком, таблицею) інформативного параметру вхідного або вихідного сигналу як характеристики абсолютних або відносних, або приведених похибок.

Нормалізована автокореляційна функція $r\Delta(\lambda)$ і спектральна густина $S\Delta(\omega)$ повинні виражатися у вигляді номінальної функції (формула, графік, таблиця) і межі допустимого відхилення від номінальної функції.

Динамічні характеристики засобів вимірювань:

- вид функції зв'язку між змінними в часі вхідними та вихідними сигналами (наприклад, вид передавальної функції, імпульсної вагової функції, перехідної характеристики), номінальні значення і найбільші допустимі відхилення від номінальних значень коефіцієнтів зазначеної функції зв'язку;

- графіки (таблиці) номінальних амплітудно- й фазочастотних характеристик і найбільші допустимі відхилення від номінальних характеристик;

- час встановлення показів t_b ;

- для вимірювальних перетворювачів, які навіть приблизно не можуть вважатися лінійними, – будь-які характеристики, що дають змогу встановити зв'язок між вхідним і вихідним сигналами, які змінюються в часі.

Засоби вимірювання функціонують в різних кліматичних зонах, в умовах впливу електромагнітних, гравітаційних та інших полів. Для забезпечення єдності вимірювань і в цих умовах ДСТУ ГОСТ 8.009:2008 передбачає нормування функції впливу $\phi(\xi)$, яка встановлює залежність похибки засобу вимірювання від відхилення однієї з впливаючих величин від нормального значення або виходу її за межі нормальної області значень.

Функція впливу $\phi(\xi)$, або найбільші допустимі зміни $\Delta l(\xi)$, повинні нормуватися окремо для кожного впливаючого фактору (параметру). Функції впливу можуть нормуватися для спільних змін впливаючих величин, якщо функція впливу будь-якої однієї величини істотно залежить від інших впливаючих величин. Функції впливу $\phi(\xi)$ повинні нормуватися у вигляді номінальної функції впливу (формулою, таблицею або графіком) і межі допустимих відхилень від номінальної функції або граничної функцією впливу.

Функції розподілу систематичної і випадкової складових похибки засобів вимірювань повинні представлятися формулами із вказанням чисе-

льних значень параметрів, таблицями, графіками, стандартними апроксимаціями, інтервалом із зазначенням імовірності.

Необхідність забезпечення єдності вимірювань не тільки в межах галузі, країни, регіону, а й в усьому світі призвела до того, що параметри і властивості засобів вимірювань, мабуть, як жодного іншого технічного об'єкту, регламентовані великою кількістю стандартів галузевих, державних, міжнародних (наприклад, стандарти ISO), міжнародних галузевих (наприклад, стандарти міжнародної електротехнічної комісії), глобальними міжнародними стандартами, наприклад міжнародною системою одиниць фізичних величин СІ.

Виходячи з викладеного, для опису засобу вимірювань доцільно застосувати загальну модель і виділити підмоделі, які дозволяють не тільки проектувати засоби вимірювань, а й дати опис проектування відповідно до стандартів на засіб вимірювання даного типу.

Розглянемо найбільш загальні підмоделі засобів вимірювання.

Номинальна статична характеристика є окремим випадком *динамічної характеристики* при $t \rightarrow \infty$, проте вона виділяється в окрему характеристику, оскільки більшість засобів вимірювань використовується в сталому режимі. У цьому випадку динамічна характеристика використовується на етапі проектування для визначення часу встановлення показників, після збігу якого характеристику можна вважати статичною.

Характеристики похибок засобів вимірювань можуть бути встановлені тільки апостеріорно після статистичних випробувань представницької групи засобів вимірювань даного типу. Разом з тим завдання автоматизованого проектування передбачає встановлення характеристик похибок на основі апріорної інформації про похибки елементів засобів вимірювань. Це завдання пов'язано з визначенням спільної густини ймовірностей великого числа елементів і передбачає велику обчислювальну продуктивність технічних засобів автоматизованого проектування.

Функції впливу зовнішніх факторів, що впливають на характеристики засобів вимірювань є одними з найважливіших характеристик, тому що по них визначається область застосування даного типу засобів вимірювань. Достовірність визначення функцій впливу розрахунковим шляхом для багатокомпонентних засобів вимірювань невисока внаслідок багатозв'язковості залежностей, так і неможливості точного опису полів впливових факторів у зонах різних компонент засобів вимірювань. Найбільш вірогідно функції впливу можуть бути визначені експериментально.

Таким чином, проектування засобів вимірювання включає проектування по апріорній інформації та уточнення отриманих моделей, особливо в частині підмоделей похибок і функцій впливу по апостеріорній експериментальній інформації, причому останній етап передбачає великий обсяг обчислень при обробці статистичної інформації і, безумовно, має бути одним з найважливіших етапів автоматизації проектування.

З урахуванням розглянутих особливостей засобів вимірювання доцільно виділити такі етапи їх проектування:

- складання динамічної детермінованої моделі;
- складання статичної детермінованої моделі;
- складання детермінованої моделі похибки;
- складання стохастичної моделі похибки;
- складання детермінованої моделі функції впливу;
- складання стохастичної моделі функції впливу;
- отримання зазначених моделей експериментальним шляхом;
- уточнення моделей на основі теоретичних і експериментальних даних.

Для побудови засобів вимірювання використовується велика кількість фізичних ефектів і способів використання фізичних принципів; самі засоби, призначені для вимірювання різних фізичних величин, відрізняються великою різноманітністю. Тому є доцільним навести коротку класифікацію засобів вимірювань і виділити їх загальні структурні елементи. Згідно ДСТУ 2681-94, розрізняють такі основні види засобів вимірювань.

Міра – засіб вимірювання, призначений для відтворення фізичної величини заданого розміру.

Вимірювальний прилад – засіб вимірювання, призначений для створення сигналу вимірювальної інформації у формі, доступній для безпосереднього сприйняття спостерігачем. Вимірювальні прилади класифікуються залежно від форми надання інформації та виду перетворення вхідної величини. Розрізняють аналогові, цифрові, показуючі, реєструючі, самописні, друкувальні, прямої дії, порівняння, інтегруючі, сумуючі. З точки зору побудови вимірювального кола або структурної схеми слід виділити прилади прямої дії, в яких передбачено одне або декілька перетворень сигналу вимірювальної інформації в одному напрямку, тобто без застосування зворотного зв'язку, а також прилади порівняння, призначені для безпосереднього порівняння вимірюваної величини з величиною, значення якої відомо.

Вимірювальний перетворювач – засіб вимірювання, призначений для вироблення сигналу вимірювальної інформації у формі, зручній для передачі, подальшого перетворення, обробки та/або зберігання, але не піддається безпосередньому сприйняттю спостерігачем. Вимірювальні перетворювачі поділяють на: первинні, проміжні, передавальні, масштабні.

Сукупність вимірювальних приладів і вимірювальних перетворювачів називається *вимірювальними пристроями*.

Вимірювальна система – сукупність засобів вимірювання (мір, вимірювальних приладів, вимірювальних перетворювачів) і допоміжних пристроїв, з'єднаних між собою каналами зв'язку, призначена для створення сигналів вимірювальної інформації у формі, зручній для автоматичної обробки, передачі та/або використання в автоматичних системах управління.

Наведемо ще кілька термінів, що використовуються в метрології:

- *перетворювальний елемент засобу вимірювання* – елемент засобу вимірювання, в якому відбувається одне з ряду послідовних перетворень величини;

- *вимірювальне коло засобу вимірювання* – сукупність перетворювальних елементів засобу вимірювання, що забезпечує здійснення всіх перетворень сигналу вимірювальної інформації;

- *сигнал вимірювальної інформації* – сигнал, функціонально пов'язаний з вимірюваною величиною;

- *вимірювальна інформація* – інформація про значеннях вимірювальних фізичних величин.

Узагальнена модель вимірювального пристрою може бути представлена структурною схемою рис. 1.1

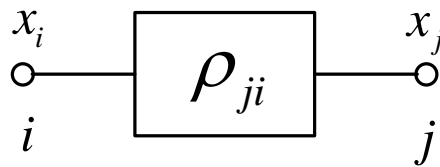


Рисунок 1.1 Узагальнена модель вимірювального пристрою

На вхід пристрою поступає власне безліч вхідних сигналів, що містять безліч величин, частина з яких в даній задачі підлягає вимірюванню, а частина – ні. Ті величини, що підлягають вимірюванню, іноді називають інформативними параметрами сигналу, а невимірювані – неінформативними. Останні хоча безпосередньо не вимірюються, проте впливають на результат вимірювання інформативних параметрів унаслідок неідеальної селективності вимірювальних перетворювачів.

Наприклад, на вхід частотоміра надходить сигнал у вигляді синусоїдної напруги $u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi)$. Вимірюваною величиною є частота $f = \frac{\omega}{2\pi}$. У цій вимірювальній задачі амплітуда і фаза не вимірюються і при вимірюванні частоти є неінформативними параметрами сигналу. Водночас амплітуда сигналу впливає на якість формування інтервалів часу, внаслідок чого при малих u_m виникає похибка вимірювання частоти.

Якщо цей же сигнал надходить на вхід вольтметра, то вимірюваною величиною є амплітуда напруги u_m , а неінформативними параметрами сигналу – частота і фаза. Якщо вимірювальне коло має амплітудно-частотну похибку, то неінформативний параметр – частота – викликає похибку вимірювання амплітуди.

Якщо цей же сигнал подати на вхід амплітудного аналізатора спектра, то вимірюваними величинами є амплітуда і частота сигналу. Однак при вимірюванні амплітуди частота є неінформативним параметром і може призвести до похибки вимірювання амплітуди так само, як амплітуда сигналу до похибки вимірювання частоти.

На вимірювальне коло впливають зовнішні фактори, що створюють похибку вимірювання відповідно до функції впливу.

Джерелами похибок є також діапазон параметрів компонентів вимірювального кола, їх нестабільність, взаємний вплив їх один на одного тепловими та електромагнітними полями, вібрацією, випромінюванням.

Таким чином, задача проектування вимірювального пристрою зводиться до мінімізації похибки пристрою при обмеженні на масу, габаритні розміри і вартість виробу, або до мінімізації вагогабаритних параметрів при обмеженнях на похибку або до створення пристрою з обмеженнями на всі його параметри – похибку, вартість, масу, габаритні розміри, умови застосування.

Специфічна особливість вимірювальних пристроїв є такою, що з передачі інформаційних параметрів сигналу вони є лінійними пристроями. Наприклад, в вольтметрі ефективних значень відбуваються нелінійні перетворення електричного сигналу відповідно до залежності

$$U_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt},$$

у той же час показання ідеального вольтметра повинні бути рівні ефективному значенню вимірюваної напруги на вході.

Ще більш наочним прикладом є ватметр активної потужності, у вимірювальному колі якого залежно від принципу дії містяться перемножуючий пристрій або квадратичні перетворювачі, тоді як покази ідеального ватметра відповідають активній потужності на навантаженні.

Лінійність перетворення по інформаційним змінним дозволяє застосувати апарат лінійної алгебри для складання моделей та аналізу вимірювальних пристроїв, і це є передумовою для автоматизації проектування, оскільки апарат лінійної алгебри наразі найбільш алгоритмізований, і в цій області розроблені великі комплекси математичного та програмного забезпечення.

Слід зазначити, що в більшості випадків перетворювальні елементи вимірювального кола односпрямовані, тобто такі, в яких по даному елементу вимірювальна інформація передається від входу до виходу, а назад від виходу до входу не передається. Прикладами односпрямованих перетворювальних елементів є перетворювачі частоти в напругу. Дійсно, адитивне зміщення вихідної напруги від зовнішнього джерела не призводить до зміни частоти на вході перетворювача.

В електромеханічному приладі постійного струму вимірюється струм, взаємодіючи з магнітним потоком постійного магніту перетворюється в механічний момент, який не може перетворитися в постійний струм на вході приладу.

Односпрямованістю майже завжди володіють перетворювальні елементи, в яких відбувається перетворення форми інформації.

Елементи, в яких форма інформації не перетвориться, мають односпрямованість, достатню для практичних цілей у разі великої відмінності вхідних і вихідних імпедансів.

Для точного аналізу вимірювального кола необхідно враховувати характер перетворювальних елементів. Методи аналізу вимірювальних кіл з двонаправленими елементами розроблені в [1].

1.2. Статична характеристика вимірювальних пристроїв

При проектуванні вимірювальних пристроїв в більшості випадків на основі досвіду розробника з використанням банку даних про фізичні принципи та методи побудови будується вимірювальне коло засобу вимірювання, тобто складається сукупність перетворювальних елементів і встановлюються зв'язки між ними для вирішення даної вимірювальної задачі. Відповідь на придатність синтезованого таким чином вимірювального кола при заданих обмеженнях може бути дано тільки в результаті його аналізу, тобто після створення математичної моделі, адекватної динамічної та статичної характеристикам, а також характеристикам похибки. Процедура синтезу в більшості випадків ітераційна на основі результатів аналізу і оцінок похибок пристрою. Тому завдання аналізу є найважливішим етапом проектування вимірювальних пристроїв. Враховуючи багаторазовість процедур аналізу, розглянемо методи і алгоритми аналізу, найбільш придатні для використання ЕОМ.

Наразі опубліковано ряд монографій, навчальних посібників, підручників, присвячених аналізу електронних схем, інформаційних пристроїв, пристроїв автоматики. Тому буде правильно рекомендувати читачам скористатися цими джерелами [1, 2], а в цій монографії на конкретних прикладах викласти найбільш придатні методи аналізу для автоматизованого проектування вимірювальних пристроїв, приділивши особливу увагу методам аналізу похибок, як найважливішої підмоделі вимірювального пристрою.

Отже, припустимо, синтезовано вимірювальне коло засобу вимірювання. У теорії автоматичного регулювання аналогом вимірювального кола є структурна схема, функціональна схема, блок-схема. У всі ці поняття в основному вкладається один і той же зміст, а саме – це сукупність перетворювальних елементів і джерел сигналів із зазначенням функціональних зв'язків між ними.

Універсальною моделлю перетворювального елемента є чотиріполюсник, в якому дві вхідні і дві вихідні змінні зв'язуються через параметри чотиріполюсника. Число змінних може бути скорочено, якщо користуватися різними співвідношеннями між ними. У вимірювальній техніці, автоматичній, радіотехніці найчастіше використовується відношення вихідної змінної до вхідних, що отримало назву (згідно ДСТУ 2681-94) коефіцієнта

перетворення вимірювального перетворювача, рівного відношенню сигналу на виході вимірювального перетворювача, що відображає вимірювану величину, до викликаного його сигналу на вході перетворювача. У [1] коефіцієнт перетворення названий ρ -параметром перетворювача. У теорії графів точки i та j називаються полюсами, відношення ρ_{ij} -гілкою. Тоді

$$\rho_{ji} = \frac{x_j}{x_i}. \quad (1.1)$$

Сигнал «причина» x_i – незалежна змінна, сигнал «наслідок» x_j – залежна змінна. Для односпрямованих елементів можлива передача тільки в напрямку від i до j . Коефіцієнт передачі в протилежному напрямку для них

$$\rho_{ij} = \frac{x_i}{x_j} = 0.$$

У разі перетворювальних елементів двонаправленої дії можлива передача з виходу на вхід. Для них

$$\rho_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \neq 0.$$

Вимірювальне коло можна представити у вигляді сукупності перетворювальних елементів, в яких відбувається одна з елементарних операцій:

- пропорційної зміни

$$x_j = \rho_{ji} x_i, \quad \rho_{ji} = \frac{x_j}{x_i}. \quad (1.2)$$

- підсумовування (рис. 1.2)

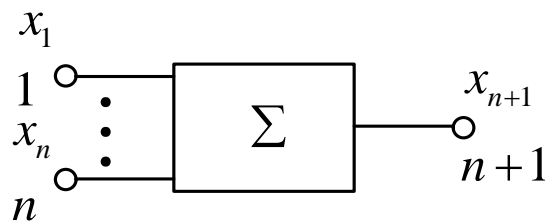


Рисунок 1.2 – Підсумовуючий перетворювальний елемент

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.3)$$

при цьому коефіцієнт перетворення по кожній змінній

$$\rho_{(n+1)i} = \frac{x_{(n+1)i}}{x_i} = 1, \quad (1.4)$$

де $x_{(x+1)i}$ – частина вихідного сигналу, викликана i -м вхідним сигналом;
 - перемноження (рис. 1.3)

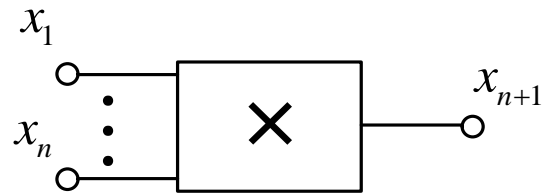


Рисунок 1.3 – Перемножуючий перетворювальний елемент

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^n x_i, \quad (1.6)$$

його лінійний аналог

$$\rho_{(n+1)n} = \frac{x_{n+1}}{\prod_{i=1}^n x_i}; \quad (1.6)$$

- функціонального нелінійного перетворення (рис. 1.4), $x_j = f(x_i)$.

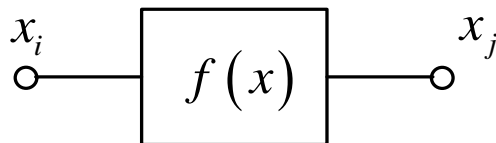


Рисунок 1.4 – Нелінійний перетворювальний елемент

З урахуванням того, що у вимірювальних пристроях перетворення вимірювальної інформації лінійно, шляхом заміни змінних функціональний перетворювач може бути представлений лінійним по інформаційним змінним.

Дійсно, заміною $x_i = y_i$, $f(x_i) = y_j$ отримаємо (рис. 1.5) $\rho_{ji} = \frac{y_j}{y_i}$

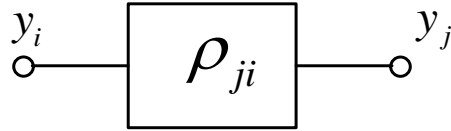


Рисунок 1.5 – Лінійний аналог нелінійного перетворювального елемента

Пояснимо це на прикладі перетворювача діючих значень напруги. В останньому, згідно з визначенням, передбачена операція зведення в квадрат миттєвого значення напруги, інтегрування і осереднення:

$$u_{Д}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt.$$

Насправді в такому перетворювачі інформаційним параметром вхідного сигналу, або вимірюваної величини, є квадрат діючого значення напруги. Зв'язок між вихідним сигналом і квадратом діючого значення напруги на вході лінійний.

Функціонування вимірювального кола може бути описано системою рівнянь, що доцільно представити в матричній формі та розв'язувати щодо шуканих змінних через відповідні визначники.

При зображенні вимірювального кола число полюсів мінімум на одиницю більше числа гілок. Тому систему рівнянь для гілок необхідно доповнити тотожностями для полюсів з автономними (незалежними) змінними типу $x_j = x_j$.

Доповнення системи тотожностями не дозволяє отримати повну систему незалежних рівнянь, тому й рішення можливе тільки відносно сукупності змінних у певних співвідношеннях.

Найбільш типові структурні схеми вимірювальних пристроїв являють собою послідовне включення односпрямованих і двонаправлених елементів, послідовне включення елементів, що мають адитивну похибку, схеми з від'ємним зворотним зв'язком, схеми, що діють за принципом інваріантності на основі корекції похибок, що містять нелінійні елементи, що передбачають взаємне розділення каналів. Тому нижче на прикладах перерахованих різновидів структурних схем будуть розглянуті правила складання матричних рівнянь і акцентовано увагу на особливості, характерні для них.

Правила обчислення визначників в аналітичній формі викладені в розд. 2.

Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів (рис.1.6).

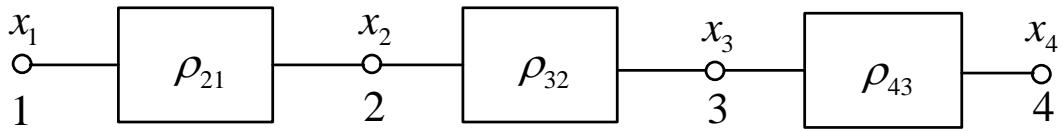


Рисунок 1.6 – Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням перетворювальних елементів

Система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_1; \\ x_2 = \rho_{21}x_1; \\ x_3 = \rho_{32}x_2; \\ x_4 = \rho_{43}x_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ця ж система в загальному вигляді

$$\begin{cases} \rho_{11}x_1 + \rho_{12}x_2 + \rho_{13}x_3 + \rho_{14}x_4 = x_1; \\ -\rho_{21}x_1 + \rho_{22}x_2 + \rho_{23}x_3 + \rho_{24}x_4 = 0; \\ \rho_{31}x_1 - \rho_{32}x_2 + \rho_{33}x_3 + \rho_{34}x_4 = 0; \\ \rho_{41}x_1 + \rho_{42}x_2 - \rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4 = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Порівняння (1.7) та (1.8) дає:

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = \rho_{44} = 1;$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{31} = \rho_{34} = \rho_{41} = \rho_{42} = 0.$$

Величини $\rho_{21}, \rho_{32}, \rho_{43}$ в системі (1.8) помножені на -1 .

Матрична форма системи (1.8)

i / j	1	2	3	4	×	x	=		·		(1.9)
1	1	0	0	0		x_1		x_1			
2	- ρ_{21}	1	0	0		x_2		0			
3	0	- ρ_{32}	1	0		x_3		0			
4	0	0	- ρ_{43}	1		x_4		0			

↑

Матриця коефіцієнтів

↑

Матриця змінних

↑

Матриця правих частин

Матриця коефіцієнтів завжди квадратна, її розмірність $n \times n$, де n – число змінних.

Аналіз матриці коефіцієнтів дозволяє встановити формальні правила заповнення клітин ij , де i – номер рядка, j – номер стовпця.

1. Зв'язок полюса j і відповідно змінної x_j , існує тільки з прилеглими (поруч розташованими) полюсами та відповідними змінними x_i . Коефіцієнт передачі в напрямку передачі $\rho_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$ і в таблицю проставляється зі

знаком «-». Коефіцієнт передачі в напрямку відсутності передачі сигналу (для односпрямованих елементів) $\rho_{ij} = 0$. Для двонапрямлених елементів $\rho_{ij} \neq 0$ і в таблицю проставляється зі знаком «+».

2. Коефіцієнт передачі від полюса j до неприлеглих полюсів дорівнює нулю. Це можна трактувати як рівність нулю всіх неприлеглих змінних, що відповідає режиму короткого замикання всіх неприлеглих полюсів.

3. Зв'язок полюсу з самим собою здійснюється через коефіцієнт передачі $\rho_{ij} = 1$, якщо $i = j$.

4. Для суматора коефіцієнт передачі дорівнює одиниці і проставляється у відповідну клітку зі знаком «-».

5. Клітки матриці коефіцієнтів заповнюються за стовпцями. При цьому у відповідний рядок стовпця j проставляються коефіцієнти передачі змінної j полюса з усіма полюсами відповідно до правил 1-4. При цьому номер розглянутої змінної є номером стовпця, а номери всіх інших змінних – номерами рядків. Отже, перший стовець ($j=1$) матриці коефіцієнтів отримуємо таким чином:

- полюс 1 має зв'язок з самим собою через $\rho_{11} = 1$ (правило 3);
- полюс 1 має зв'язок з полюсом 2 через коефіцієнт ρ_{21} , який проставляється у другий рядок першого стовпця зі знаком «-» (правило 1);
- полюс 1 має зв'язок з неприлеглим полюсом 3 через коефіцієнт $\rho_{31} = 0$, який проставляється в третій рядок першого стовпця (правило 2);
- полюс 1 має зв'язок з неприлеглим полюсом 4 через коефіцієнт $\rho_{41} = 0$, який проставляється в четвертий рядок першого стовпця (правило 2).

Аналогічно описаному для першого стовпця заповнюються всі стовпці матриці коефіцієнтів.

Загальний коефіцієнт передачі знаходиться як відношення відповідних детермінантів

$$k_{41} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{\det 4 / \det k}{\det 1 / \det k} = \frac{\det 4}{\det 1},$$

де $\det k$ - визначник матриці коефіцієнтів; $\det 4$ - визначник матриці коефіцієнтів, в якому 4-й стовпець замінений матрицею-стовпцем правих частин; $\det 1$ - визначник матриці коефіцієнтів, в якому 1-й стовпець замінений матрицею-стовпцем правих частин. Таким чином,

$$k_{41} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ -\rho_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{43} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{43} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)^{1+4} x_1 \begin{vmatrix} -\rho_{21} & 1 & 0 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_{43} \end{vmatrix}}{x_1} = \rho_{21}\rho_{32}\rho_{43}.$$

Послідовне з'єднання перетворювальних елементів з адитивною похибкою на виході елементів (рис. 1.7).

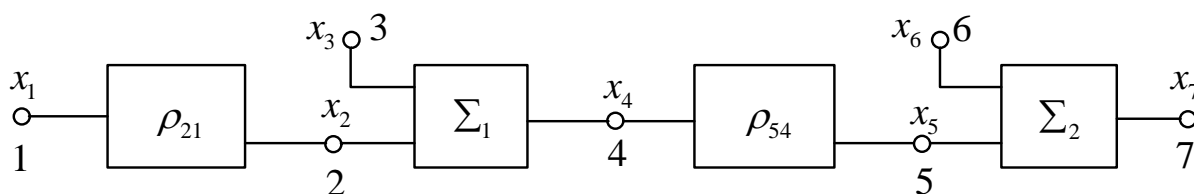


Рисунок 1.7 – Вимірювальне коло з послідовним з'єднанням елементів і адитивною похибкою на виході елементів

Система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_1 & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = x_1; \\ x_2 = \rho_{21}x_1 & -\rho_{21}x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0; \\ x_3 = x_3 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = x_3; \\ x_4 = x_3 + x_2 & 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0; \\ x_5 = \rho_{54}x_4 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \rho_{54} \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0; \\ x_6 = x_6 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = x_6; \\ x_7 = x_6 + x_5 & 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 - 1 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Матричний запис (1.10)

ij	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	$-\rho_{21}$	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	-1	-1	1	0	0	0
5	0	0	0	$-\rho_{54}$	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	-1	-1	1

 \times

x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7

 $=$

x_1
0
x_3
0
0
x_6
0

(1.11)

↑
↑
↑

Матриця коефіцієнтів
Матриця змінних
Матриця правих частин

Загальний коефіцієнт перетворення

$$k_{71} = \frac{\det 7}{\det 1} = \rho_{21}\rho_{54} + \rho_{54} \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_6}{x_1}. \quad (1.12)$$

Введення тотожностей $x_3 = x_3$ для додаткових незалежних змінних x_3 і x_6 призвело до того, що матриця-стовпець правих частин містить у відповідних рядках ці змінні.

Вимірювальний підсилювач з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 1.8).

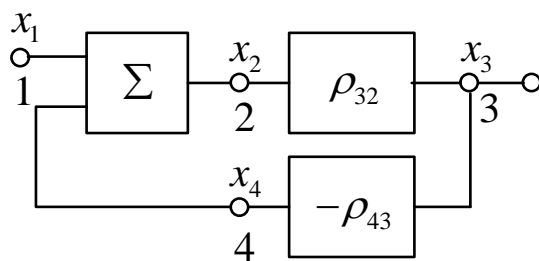


Рисунок 1.8 – Вимірювальний підсилювач з від'ємним зворотним зв'язком (ВЗЗ)

Розмірність матриці дорівнює числу змінних. Матриця коефіцієнтів 4×4 , матриця змінних і матриця правих частин 4×1 :

ij	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	-1	1	0	-1
3	0	$-\rho_{32}$	1	0
4	0	0	ρ_{43}	1

 \times

x	
x_1	x_1
x_2	0
x_3	0
x_4	0

 $=$

x_1
0
0
0

(1.13)

$$k_{31} = \frac{\rho_{32}}{1 + \rho_{32}\rho_{43}}.$$

Вимірювальний підсилювач з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором (рис. 1.9) [3]. Складемо матричний запис. Число змінних 6, отже, розмірність матриці коефіцієнтів 6×6 , матриці-стовпці змінних і правих частин мають по 6 рядків. Число незалежних змінних 1 (x_1), отже, матриця правих частин буде мати тільки один ненульовий рядок – перший.

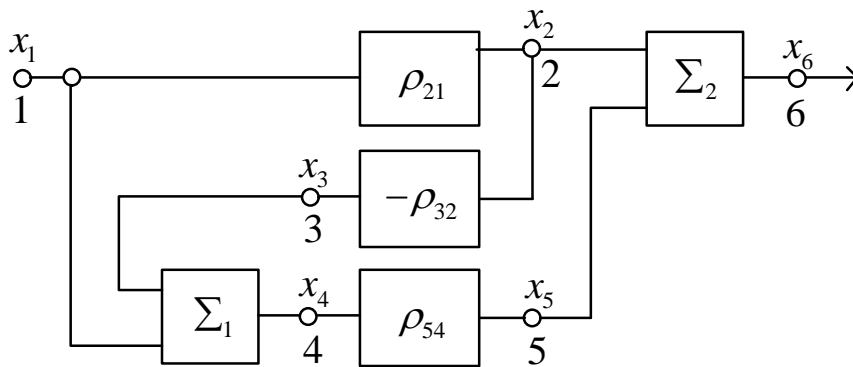


Рисунок 1.9 – Вимірювальний підсилювач з адитивною корекцією похибок і зовнішнім суматором

Відповідно до викладених вище правил заповнимо матрицю коефіцієнтів, потім матриці змінних і правих частин:

ij	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	$-\rho_{21}$	1	0	0	0	0
3	0	ρ_{32}	1	0	0	0
4	-1	0	-1	1	0	0
5	0	0	0	$-\rho_{54}$	1	0
6	0	-1	0	0	-1	1

 \times

x	
x_1	x_1
x_2	0
x_3	0
x_4	0
x_5	0
x_6	0

 $=$

x_1
0
0
0
0
0

(1.14)

Загальний коефіцієнт перетворення

$$k_{61} = \frac{x_6}{x_1} = \frac{\det 6}{\det 1} = \rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}. \quad (1.15)$$

Послідовне включення лінійних і нелінійних перетворювальних елементів (рис. 1.10).

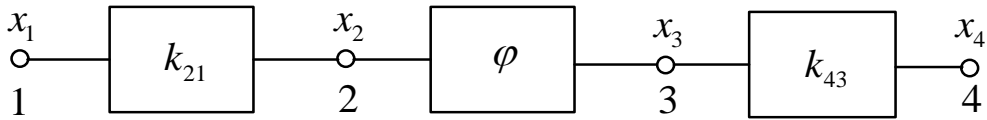


Рисунок 1.10 – Схема послідовного включення лінійних і нелінійних блоків

Система нелінійних рівнянь в просторі сигналів

$$x_1 = x_1; \quad x_2 = k_{21} \cdot x_1; \quad x_3 = \varphi(x_2); \quad x_4 = k_{43}x_3. \quad (1.16)$$

Нехай функціональний блок описується поліноміальною залежністю

$$x_3 = \varphi(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2; \quad (1.17)$$

оскільки

$$x_2 = k_{21}x_1, \quad \varphi(x_2) = a_0 + a_1k_{21}x_1 + a_2k_{21}^2x_1^2. \quad (1.18)$$

Виконаємо заміну змінних з метою побудови системи лінійних рівнянь в просторі інформаційних змінних:

$$a_0 = y_1; \quad a_1k_{21}x_1 = y_2; \quad a_2k_{21}^2x_1^2 = y_3.$$

$$\text{Тоді } x_3 = y_4 = y_1 + y_2 + y_3; \quad y_5 = x_4; \quad \rho_{54} = k_{43}; \quad y_5 = \rho_{54}y_4. \quad (1.19)$$

Структурна схема пристрою (рис. 1.10) після заміни змінних буде мати вигляд, представлений на рис. 1.11.

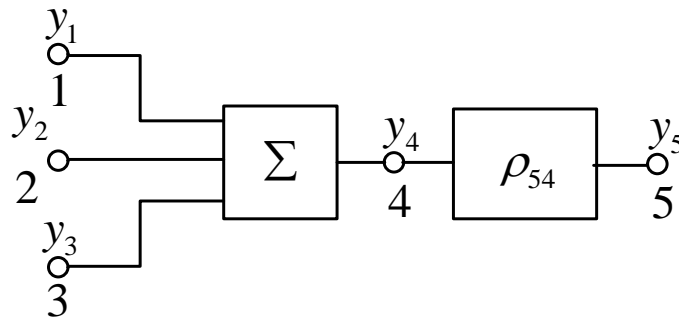


Рисунок 1.11 – Структурна схема пристрою рис 1.10 після заміни змінних

Матричне рівняння системи (рис. 1.11) в просторі інформаційних змінних:

ij	1	2	3	4	5
1	1				
2		1			
3			1		
4	-1	-1	-1	1	
5				$-\rho_{54}$	1

 \times

y
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5

 $=$

y_1
y_2
y_3
0
0

(1.20)

Знайдемо відношення

$$\frac{y_5}{y_2} = \frac{\det 5}{\det 2} = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)\rho_{54}}{y_2}. \quad (1.21)$$

Після зворотної заміни змінних отримаємо

$$k_{52} = \frac{k_{43}}{a_1 k_{21} x_1} + 1 + \frac{a_{21}}{a_1} k_{43} k_{21} x_1. \quad (1.22)$$

Ватметр з перемножувальним перетворювачем (рис. 1.12)

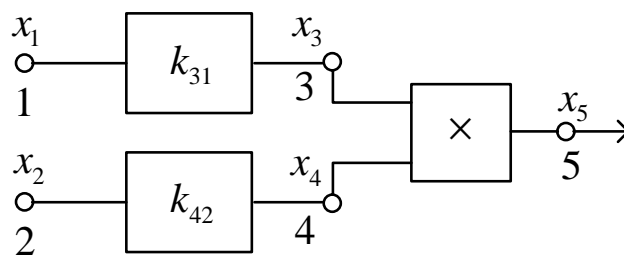


Рисунок 1.12 – Схема ватметра з перемножувальним перетворювачем

Вимірювальне коло в просторі сигналів x описується системою

$$x_3 = k_{31}x_1; \quad x_4 = k_{42}x_2; \quad x_5 = x_3x_4. \quad (1.23)$$

Введемо змінну $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_5$, $k_{31}k_{42} = \rho_{21}$. Тоді система лінійних рівнянь в просторі інформаційних змінних набуде вигляду

$$y_1 = y_1; \quad y_2 = \rho_{21}y_1.$$

Інформаційна модель у просторі y (рис. 1.13)

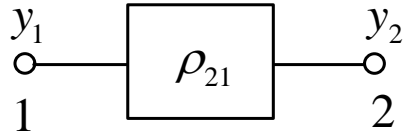


Рисунок 1.13 – Інформаційна модель ватметра, що відповідає рис. 1.12

Матричне модель в просторі y :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_{21} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (1.24)$$

Розв'язок (1.24) буде

$$y_2 = \rho_{21}y_1. \quad (1.25)$$

Після заміни отримаємо

$$x_5 = k_{31}k_{42}x_1x_2.$$

Ватметр сумо-різницевого типу. Вимірювальне коло (нелінійну модель) такого ватметра в просторі сигналів x подано на рис. 1.14.

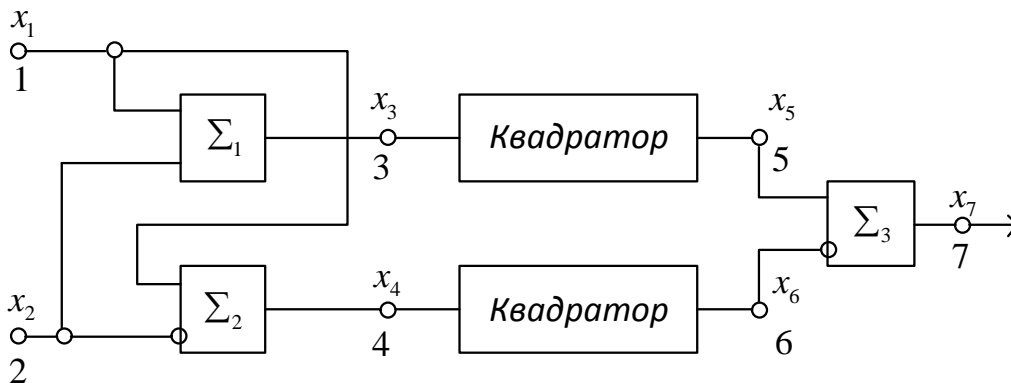


Рисунок 1.14 – Схема ватметра сумо-різницевого типу

Модель описується системою нелінійних рівнянь в просторі сигналів x

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2; \\ x_4 = x_1 - x_2; \\ x_5 = k_{53}x_3^2; \\ x_6 = k_{64}x_4^2; \\ x_7 = x_5 - x_6. \end{cases} \quad (1.26)$$

Розв'язання системи (1.26) методом підстановки дає залежності

$$x_5 = k_{53} (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2); \quad (1.27)$$

$$x_6 = k_{64} (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2); \quad (1.28)$$

$$x_7 = x_1^2 (k_{53} - k_{64}) + 2x_1x_2 (k_{53} + k_{64}) + x_2^2 (k_{53} - k_{64}); \quad (1.29)$$

Для отримання лінійної моделі за інформаційними змінними в просторі y проведемо заміни:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2; & y_2 = 2x_1x_2; & y_3 = x_2^2; \\ y_4 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2; & y_5 = x_5; \\ y_6 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2; & y_7 = x_6; \\ y_8 = x_7; & k_{53} = \rho_{54}; & k_{64} = \rho_{76}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Запишемо систему рівнянь у просторі інформаційних змінних y :

$$\begin{cases} y_1 = y_1; & y_2 = y_2; & y_3 = y_3; & y_4 = y_1 + y_2 + y_3; \\ y_5 = \rho_{54}y_4; & y_6 = y_1 - y_2 + y_3; & y_7 = \rho_{76}y_6; & y_8 = y_5 - y_7. \end{cases} \quad (1.31)$$

Перші три рівняння є тотожністю, тому система (1.31) недовизначена і її розв'язання можливе лише відносно сукупності змінних. У розв'язання відносно будь-якої змінної входять змінні, складові тотожності.

На основі системи (1.31) складемо вимірювальне коло ватметра, лінійну за інформаційними змінними моделі в просторі y (рис. 1.15).

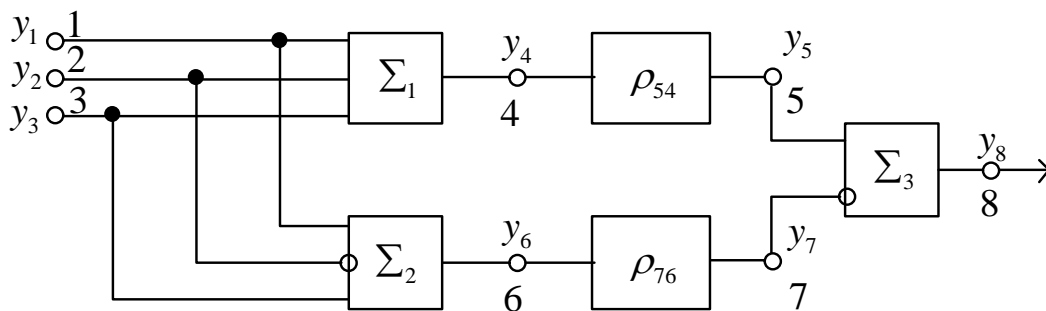


Рисунок 1.15 – Інформаційна модель ватметра сумо-різницевого типу

<i>ij</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	-1	-1	-1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	$-\rho_{54}$	1	0	0	0
6	-1	1	-1	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	$-\rho_{76}$	1	0
8	0	0	0	0	-1	0	1	1

 \times

<i>y</i>
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
y_7
y_8

 $=$

y_1
y_2
y_3
0
0
0
0
0

. (1.32)

Знайдемо вихідну величину y_8 .

$$y_8 = \frac{\det 8}{\det C} = y_1(\rho_{54} - \rho_{76}) + y_2(\rho_{54} + \rho_{76}) + y_3(\rho_{54} - \rho_{76}). \quad (1.33)$$

Провівши зворотню заміну змінних – інформаційних на сигнальні, отримаємо

$$x_7 = x_1^2(k_{53} - k_{64}) + 2x_1x_2(k_{53} + k_{64}) + x_2^2(k_{53} - k_{64}). \quad (1.34)$$

Якщо виконується умова інваріантності до неінформативних параметрів

$$k_{53} = k_{64} = k,$$

отримаємо

$$x_7 = 4k x_1 x_2.$$

Як видно, рівняння (1.29), отримане шляхом підстановок із системи нелінійних рівнянь (1.26), і рівняння (1.34), отримане з матричного рівняння (1.32) після зворотної заміни змінних, співпадають. Цей приклад підтверджує можливість застосування матричного методу для аналізу вимірjuвальних кіл, які мають в своєму складі нелінійні елементи.

Вимірювальний пристрій з часовим поділом каналів. Розглянемо цей тип пристроїв на прикладі цифрового фазометра з адитивною корекцією [4], сигнальна схема якого представлена на рис. 1.16 ($\Phi 1$, $\Phi 2$ – вибірко-ві фільтри; $УО1$; $УО2$ – підсилювачі-обмежувачі; ТФІП – тригерний фазовимірювальний перетворювач; РС – реверсивний лічильник).

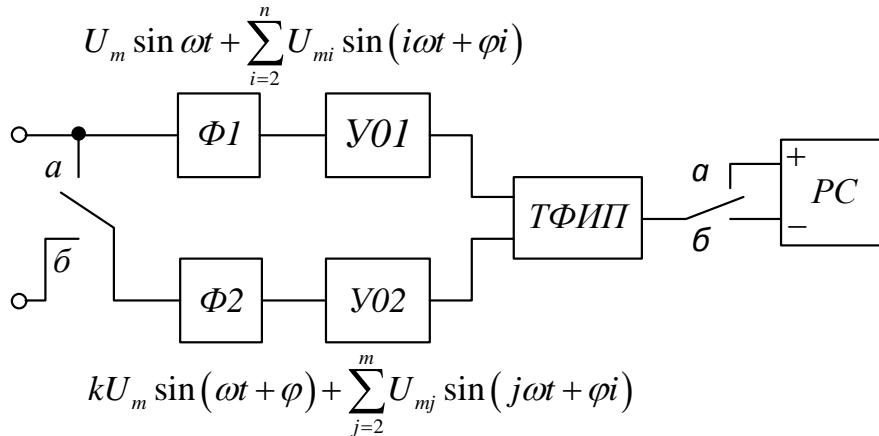


Рисунок 1.16 – Схема цифрового фазометра з адитивною корекцією

В такт *a* на обидва канали фазометра надходять спотворені сигнали

$$u_m \sin \omega t + \sum_{i=2}^n u_{mi} \sin(i\omega t + \varphi_i)$$

і вимірюється фазовий зсув на виході каналів перетворення, який заноситься на сумуючий вхід реверсивного лічильника.

В такт *б* на перший канал надходить той самий сигнал, а на другий – інший сигнал

$$ku_m \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{j=2}^m u_{mj} \sin(i\omega t + \varphi_j)$$

і фазовий зсув між ними надходить на від'ємний вхід реверсивного лічильника, залишок показань якого є результатом вимірювання.

Фільтри в каналах фазометра дозволяють зменшити похибку від нелінійних спотворень вхідних сигналів. При фільтрації, підсиленні і обмеженні відбуваються додаткові фазові зрушення на частоті основної гармоніки, які є адитивними похибками, що враховано при складанні інформаційної моделі фазометра. Інформаційна модель представлена на рис. 1.17.

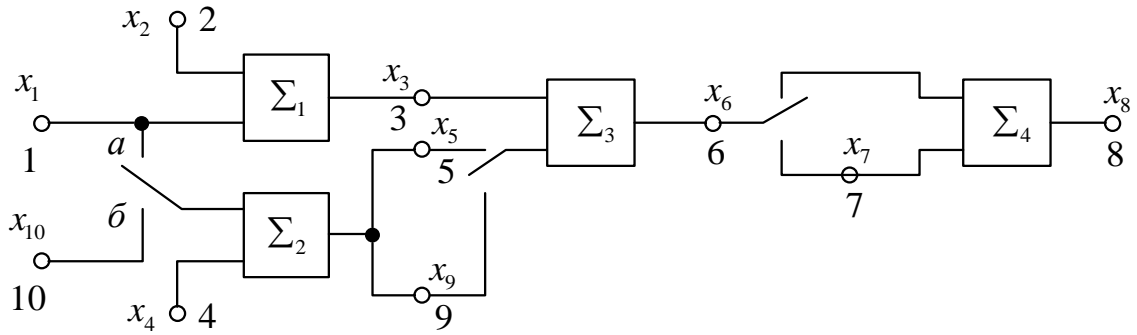


Рисунок 1.17 – Інформаційна модель фазометра з адитивною корекцією

Рівняння такту *a*:

$$x_1 + x_2 = x_3; \quad x_1 + x_4 = x_5; \quad x_6 = x_3 - x_5.$$

Рівняння такту *б*:

$$x_1 + x_2 = x_3; \quad x_{10} + x_4 = x_9; \quad x_7 = x_3 - x_9; \quad x_8 = x_6 - x_7.$$

Доповнимо ці рівняння тотожностями для незалежних джерел

$$x_1 = x_1; \quad x_2 = x_2; \quad x_4 = x_4; \quad x_{10} = x_{10}.$$

Наведемо модель фазометра в матричній формі у відповідності з викладеними правилами про зв'язки між вузлами

<i>ij</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>x</i>	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_1	x_1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	x_2	x_2
3	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	x_3	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	x_4	x_4
5	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	x_5	0
6	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	0	x_6	0
7	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	x_7	0
8	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	x_8	0
9	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	x_9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x_{10}	x_{10}

Оскільки вимірювальне коло містить тільки підсумовуючі елементи, то матриця містить тільки одиниці і сильно розріджена нулями. Це полегшує процес обчислення визначників. Результат вимірювання:

$$x_8 = \frac{\det 8}{\det k} = x_{10} - x_1.$$

Вольтметр ефективних значень з адитивною корекцією похибок і часовим поділом каналів (рис. 1.18).

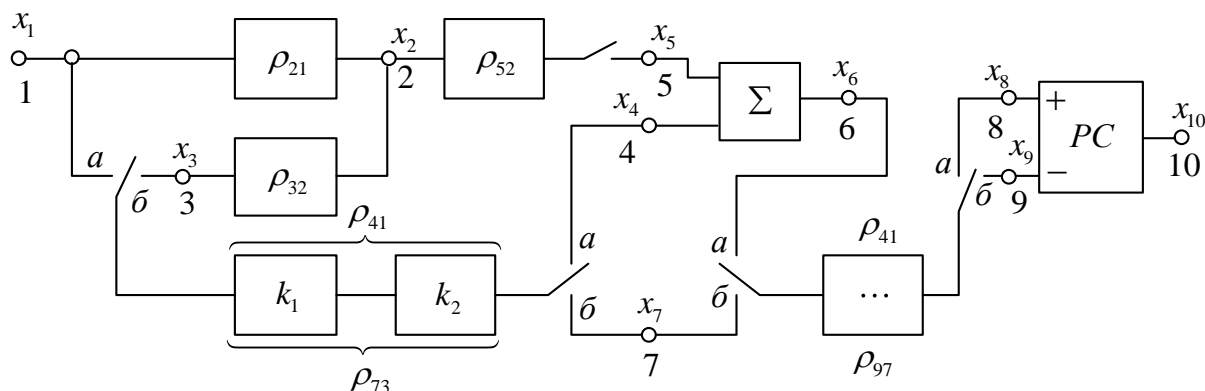


Рисунок 1.18 – Структурна схема вольтметра ефективних значень з адитивною корекцією похибок і часовим поділом каналів

На схемі: ρ_{21} , k_1 – широкосмугові підсилювачі змінної напруги; ρ_{52} , k_2 – лінійні детектори ефективних значень; ρ_{86} , ρ_{97} – перетворювач напруги в частоту; $\rho_{10,8} - \rho_{10,9}$ – реверсивний лічильник.

З урахуванням часового розділення каналів один і той же канал, що перетворює сигнал в різний час, в загальному випадку має різні коефіцієнти перетворення, тому такі канали позначаються різними індексами. Ця різниця зумовлена не тільки зміною каналів від такту до такту, а й нерівністю вхідних і вихідних імпедансів комутованих каналів.

Схема рис. 1.18 описується десятима змінними. Матричне рівняння схеми:

<i>ij</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	1										x_1	x_1
2	$-\rho_{21}$	1									x_2	0
3		$-\rho_{52}$	1								x_3	0
4	$-\rho_{41}$			1							x_4	0
5		$-\rho_{52}$			1						x_5	0
6				-1	-1	1					x_6	0
7			$-\rho_{73}$				1				x_7	0
8						$-\rho_{86}$		1			x_8	0
9							$-\rho_{97}$		1		x_9	0
10								$-\rho_{10,8}$	$-\rho_{10,9}$	1	x_{10}	0

↑

Матриця коефіцієнтів

×

↑

Матриця змінних

=

↑

Матриця правих частин

Визначник $\det 1$ є визначником трикутної матриці:

$$\det 10 = x_1 \rho_{86} \rho_{10,8} (\rho_{21} \rho_{52} + \rho_{41} - \rho_{21} \rho_{32} \rho_{77});$$

$$k_{10,1} = \frac{\det 10}{\det 1}.$$

Вимірювальне коло двонаправлених елементів [1]. На рис. 1.19 подано принципову схему триланкового подільника напруги, на рис. 1.20 – його вимірювальне коло, що містить двонаправлені елементи, на рис. 1.21 – відповідний граф.

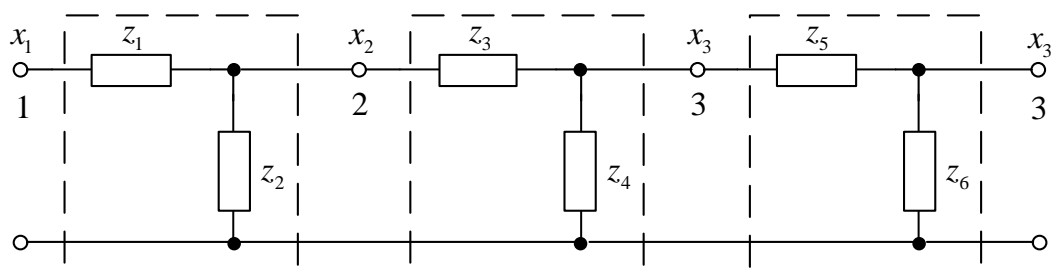


Рисунок 1.19 – Принципова схема триланкового дільника напруги

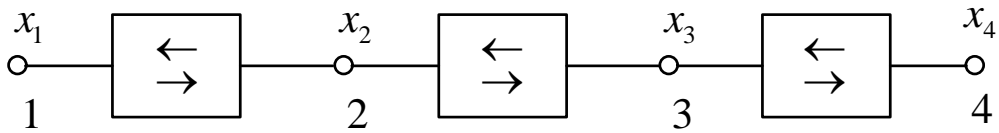


Рисунок 1.20 – Вимірювальне коло дільника напруги

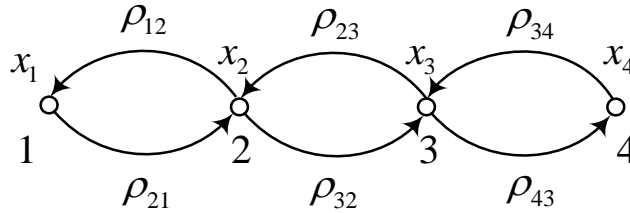


Рисунок 1.21 – Граф дільника напруги

Коефіцієнт ρ знаходиться як відношення відповідних змінних за умови рівності нулю всіх неприлеглих змінних, тобто вважаючи коротке замикання неприлеглих вузлів:

$$\rho_{21} = \frac{\frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3}}{z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3}}; \quad \rho_{32} = \frac{\frac{z_4 z_5}{z_4 + z_5}}{z_3 + \frac{z_4 z_5}{z_4 + z_5}}; \quad \rho_{43} = \frac{z_6}{z_5 + z_6};$$

$$\rho_{12} = 1; \quad \rho_{23} = \frac{\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}}{z_3 + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}}; \quad \rho_{34} = \frac{\frac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}}{z_5 + \frac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}}.$$

Матричний запис

i / j	1	2	3	4
1	1	ρ_{12}	0	0
2	$-\rho_{21}$	1	ρ_{23}	0
3	0	$-\rho_{32}$	1	ρ_{34}
4	0	0	$-\rho_{43}$	1

 $\times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

$$k_{41} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{\det 4}{\det 1} = \frac{\rho_{21} \rho_{32} \rho_{43}}{1 + \rho_{43} \rho_{34} + \rho_{32} \rho_{23}}.$$

Якщо $\rho_{34} = 0$ і $\rho_{23} = 0$, то $k_{41} = \rho_{21} \cdot \rho_{32} \cdot \rho_{43}$.

Надання виразів визначниками. Враховуючи те, що операції над матрицями та визначниками легко алгоритмізуються, в ряді випадків, наприклад, при наступному аналізі похибок доцільно представляти моделі вимірювальних пристроїв визначниками.

Процедура знаходження елементів визначника, який при обчисленні був би тотожний початковому виразу, зводиться до розв'язання системи рівнянь, складених шляхом прирівнювання окремих доданків розкритого визначника доданком початкового виразу. Порядок потрібного визначника дорівнює числу співмножників доданка алгебраїчного виразу, де це число найбільше.

Розглянемо перетворювач з адитивною корекцією (див. рис. 1.9), для якого (див. (1.15))

$$k_{61} = \rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}.$$

У цьому виразі найбільше число співмножників в третьому доданку – три. Тому k_{61} може бути представлено визначником не більше третього порядку, оскільки число змінних менше 9, а число доданків менше 6.

Шлях розв'язку наступний

$$\begin{aligned} \rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Припустимо $a_{11} = \rho_{21}$, $a_{22} = \rho_{54}$, $a_{33} = -\rho_{32}$, тоді $a_{11}a_{22}a_{33} = -\rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}$;

$$-a_{11}a_{23}a_{32} = \rho_{21}, \text{ звідки } a_{23} = -1, a_{32} = 1;$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} = 0, \text{ звідки } a_{12} = 0; a_{21} = 0;$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} = 0, \text{ звідки } a_{12} = 0;$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} = 0, \text{ звідки } a_{21} = 0;$$

$$-a_{13}a_{22}a_{32} = \rho_{54}, \text{ звідки } a_{13} = -1, a_{31} = 1.$$

Отже

$$\rho_{21} + \rho_{54} - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32} = \begin{vmatrix} \rho_{21} & 0 & -1 \\ 0 & \rho_{54} & -1 \\ 1 & 1 & -\rho_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

Елементами визначника, звісно, можуть бути числа і функції залежно від початкового виразу.

Доцільність подання виразів визначниками буде підтверджена нижче при аналізі похибок для будь-яких прирощень елементів визначника.

1.3. Детермінована модель похибок вимірювальних пристроїв

Існує кілька методик отримання детермінованих моделей похибок вимірювальних пристроїв [1]. Найбільш поширені моделі чутливості, які є частковими похідними статичної та динамічної характеристик пристрою за відповідними змінним.

У більшості випадків використовують тільки перші похідні. Однак при цьому не тільки неточно обчислюється похибка, але виникає небезпека отримання принципово невірному висновку про функціонування пристрою. Це особливо проявляється в пристроях, де реалізовано принцип інваріантності [3]. Тому в деяких роботах поставлені і вирішені завдання отримання детермінованою моделі похибки пристрою при довільних припущеннях величин, що є джерелами похибок. Так, в [1] розроблено алгебраїчний метод знаходження припущення функції по припущенням аргументів. Сутність цього методу полягає в тому, що будь-який як завгодно складний вираз може бути представлено каскадом елементарних функцій. Для всіх елементарних функцій знайдені вирази для повних припущень за будь-яких припущень аргументів. Застосовуючи послідовно ці вирази, шляхом тільки алгебраїчних перетворень можна знайти припущення для будь якої функції, не зважаючи на її складність.

Наприклад, вираз

$$k = \frac{k_1 k_2 + k_3 k_4}{k_5 + k_6 k_7}$$

можна представити часткою

$$k = \frac{B}{A},$$

чисельник B і знаменник A як суми

$$B = C + D, \quad A = E + L,$$

доданки суми C, D, L як добутки

$$C = k_1 k_2; \quad D = k_3 k_4; \quad L = k_6 k_7.$$

Вирази припущень елементарних функцій представлені в [1].

Незважаючи на простоту і універсальність цього методу, його застосування в автоматизованому аналізі ускладнено в зв'язку зі складністю машинних алгебраїчних перетворень в загальному вигляді.

Тому нижче наведено методику отримання детермінованої моделі похибки, коли модель характеристики пристрою задано в матричній формі. Як було показано вище, шукані характеристики є відношенням визначників.

Відносне прирощення відношення $z = \frac{x}{y}$

$$\delta_z = \frac{\delta x - \delta y}{1 + \delta y},$$

де δx , δy – відносні прирощення чисельника і знаменника.

Якщо x і y задані визначниками, то зрозуміла необхідність знаходження прирощень визначників залежно від прирощень їхніх елементів.

Скористаємося теоремою, відповідно до якої визначник, в якому елементи одного стовпця являють собою суму двох величин, дорівнює сумі двох визначників того ж порядку, де відповідний стовпець першого визначника складається з перших доданків вихідного стовпця, а відповідний стовпець другого визначника складається з других доданків вихідного стовпця, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \bar{a}_{1j} + \Delta_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & \bar{a}_{2j} + \Delta_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \bar{a}_{nj} + \Delta_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \bar{a}_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \bar{a}_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \bar{a}_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \bar{a}_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \Delta_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \Delta_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \Delta_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \Delta_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Неважко показати, що визначник, в якому всі елементи є сумою двох величин, дорівнює сумі 2^n визначників того ж порядку, елементи стовпців яких складаються тільки з доданків елементів у різних поєднаннях.

Проілюструємо викладене на визначнику 3-го порядку. Нехай кожен елемент визначника є сумою

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij}, \quad (1.37)$$

де \bar{a}_{ij} – номінальне значення елемента; Δ_{ij} – прирощення елемента або похибка елемента.

Послідовність тотожних перетворень визначника наведено на рис. 1.22.

Уведемо поняття – визначник n -го порядку k -го порядку прирощення D_n^k , $k = 0, 1, \dots, n$:

D_n^0 – визначник n -го порядку нульового порядку прирощень ($k = 0$) не містить стовпців прирощень, а містить лише стовпці номінальних значень елементів визначника, внаслідок цього є номінальним значенням визначника;

D_n^1 – визначник n -го порядку 1-го порядку прирощень ($k = 1$) містить один стовпець прирощень, а решта – стовпці номінальних значень;

D_n^2 – визначник n -го порядку 2-го порядку прирощень ($k = 2$) містить два стовпці прирощень, а решта – стовпці номінальних значень;

D_n^n – визначник n -го порядку n -го порядку прирощень ($k = n$) містить тільки стовпці прирощень і не містить стовпців номінальних значень.

Визначник D_n^n є визначником матриці прирощень A_Δ .

Уведемо поняття – член k -го порядку прирощень B_k , який є сумою визначників n -го порядку k -го порядку прирощень.

Тоді, відповідно до викладеного вище, визначник n -го порядку, в якому всі елементи є сумою номінального значення та прирощення елемента:

$$D_n = \sum_{k=0}^n B_k. \quad (1.38)$$

Число визначників в сумі B_k дорівнює числу сполучень з порядку визначника n за порядком прирощень k :

$$B_k = \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k = D_{n,1}^k + D_{n,2}^k + \dots + D_{n,C_n^k}^k. \quad (1.39)$$

Нагадаємо, що число сполучень із n по k є коефіцієнтами бінома Ньютона, які легко визначаються за трикутником Паскаля (рис. 1.23).

n		Σ
1	1	1
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	25
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	12

Рисунок 1.23 – Трикутник Паскаля

Наприклад визначник 3-го порядку, в якому всі елементи суми $a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij}$, подається як сума визначників, загальне число яких дорівнює $2^3 = 8$, у тому числі:

- нульового порядку прирощень $C_3^0 = 1$;
- 1-го порядку прирощень $C_3^1 = 3$;
- 2-го порядку прирощень $C_3^2 = 3$;
- 3-го порядку прирощень $C_3^3 = 1$;

$$D_3 = \sum_{k=0}^3 B_k = B_0 + B_1 + B_2 + B_3;$$

$$B_0 = D_3^0 = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix}; \quad B_3 = D_3^3 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{11} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix};$$

$$B_1 = D_{3,1}^1 + D_{3,2}^1 + D_{3,3}^1 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \Delta_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \Delta_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \Delta_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \Delta_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \Delta_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \Delta_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \Delta_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix};$$

$$B_2 = D_{3,2}^2 + D_{3,2}^2 + D_{3,3}^2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \bar{a}_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \bar{a}_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \bar{a}_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \bar{a}_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \bar{a}_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \bar{a}_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \bar{a}_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначник 4-го порядку, в якому $a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta_{ij}$ дорівнює сумі $2^4 = 16$ визначників, у тому числі:

- нульового порядку прирощень $C_4^0 = 1$;
- 1-го порядку прирощень $C_4^1 = 4$;
- 2-го порядку прирощень $C_4^2 = 6$;
- 3-го порядку прирощень $C_4^3 = 4$;
- 4-го порядку прирощень $C_4^4 = 1$;

$$D_4 = \sum_{k=0}^4 B_k = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Для наближеного аналізу похибок враховують тільки визначники 1-го порядку прирощень. Оскільки число визначників 1-го порядку прирощень дорівнює порядку визначника $C_n^1 = n$, а розкладання кожного визначника за відповідним стовпцем прирощення дає n доданків, що складаються з добутку прирощення на алгебраїчний доданок, то загальне число доданків в члені 1-го порядку прирощень дорівнює n^2 :

$$B_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} A_{ij}, \quad (1.40)$$

де Δ_{ij} – прирощення ij -го елемента; A_{ij} – алгебраїчне доповнення i,j -го прирощення.

Відносне прирощення 1-го порядку

$$\delta_1 = \frac{B_1}{B_0}. \quad (1.41)$$

Відносне прирощення 1-го порядку, виражене через відносні прирощення елементів:

$$\delta_1 = \frac{1}{B_0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \bar{a}_{ij} A_{ij}, \quad (1.42)$$

де $\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\bar{a}_{ij}}$ відносне прирощення ij -го елемента.

У загальному випадку похибка визначника є многочлен порядку n відносно похибок елементів, тобто

$$\begin{aligned} \delta = F(\delta_{ij}) = & \sum_1^{nC_n^1} \delta_{ij} C_{ij}^1 + \\ & + \sum_1^{n(n-1)C_n^2} \delta_{ij} \delta_{pq} C_{ij,pq}^2 + \sum_1^{n(n-1)(n-2)C_n^3} \delta_{ij} \delta_{pq} C_{ij,pq,lm}^3 + \dots + \sum_1^{n!C_n^n} C_{ij}^n \prod_1^k \delta_{ij}^\circ, \quad (1.43) \\ & i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тут $C_{ij}^1 = \bar{a}_{ij} \bar{A}_{ij}^1 / B_0$, \bar{a}_{ij} – номінальні значення ij -го елемента визначника; \bar{A}_{ij}^1 – номінальні значення алгебраїчних доповнень 1-го порядку; B_0 – номінальні значення визначника

$$C_{ij,pq}^2 = \bar{a}_{ij} \bar{a}_{pq} \bar{A}_{ij,pq}^2 / B_0,$$

де \bar{a}_{pq} – номінальні значення елементів додаткового мінору до мінору \bar{a}_{ij} ; $\bar{A}_{ij,pq}^2$ – номінальні значення алгебраїчних доповнень 2-го порядку;

$$C_{ij,pq,lm}^3 = \bar{a}_{ij} \bar{a}_{pq} \bar{a}_{lm} \bar{A}_{ij,pq,lm}^3 / B_0,$$

де \bar{a}_{lm} – номінальні значення елементів додаткових мінорів 2-го порядку; $\bar{A}_{ij,pq,lm}^3$ – номінальні значення алгебраїчних доповнень 3-го порядку;

$$C_{ij}^n = A_{ij}^n \prod_1^n \bar{a}_{ij} / B_0,$$

де $\prod_1^n \bar{a}_{ij}$ – добутки номінальних значень елементів визначника в різних неповторюваних поєднаннях; A_{ij}^n – алгебраїчне доповнення n -го порядку,

чисельно рівне ± 1 .

Рівняння (1.43) дозволяє точно обчислити похибку визначника при будь-яких значеннях похибки δ_{ij} , але в більшості випадків для практичних цілей достатньо врахування похибок 1-го порядку малості, а для засобів вимірювань, що працюють за принципом інваріантності, і 2-го порядку малості.

Таким чином, отримана загальна оперативна, достатньо формалізована і придатна для ЕОМ методика знаходження прирощення визначника n -го порядку в залежності від прирощень його елементів при будь-яких наскільки завгодно великих прирощеннях останніх. Як окремий випадок отримано прирощення визначника n -го порядку з урахуванням прирощень першого порядку.

Якщо елементи визначника є деякими функціями, залежними одне від одного, що реалізується, наприклад, у визначнику Вандермонда, то необхідно насамперед скласти матрицю прирощень і її стовпці використовувати для заміни стовпців у відповідних членах B_k .

Як приклад застосування описаної методики розглянемо модель похибки вимірювального підсилювача з від'ємним зворотним зв'язком (див. рис. 1.8), описаного системою рівняння (1.13). Його коефіцієнт передачі:

$$k_{31} = \frac{\det 3}{\det 1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\rho_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{43} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)^{1+3} x_1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\rho_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(-1)^{1+1} x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\rho_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \rho_{43} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{D_4}{D_3} = \frac{\rho_{32}}{1 + \rho_{32}\rho_{43}},$$

де D_4, D_3 – визначники чисельника і знаменника відповідно.

Складемо матриці прирощень для D_4 і D_3 :

$$A_{D_4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad A_{D_3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\Delta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Відносна похибка k_{31} :

$$\delta k_{31} = \frac{\delta D_4 - \delta D_3}{1 + \delta D_3},$$

де

$$\delta D_{\text{ч}} = \frac{1}{B_{\text{ч}0}} \sum_{k=1}^3 B_{\text{ч}k}; \quad \delta D_3 = \frac{1}{B_{03}} \sum_{k=1}^3 B_{3k}.$$

Зауваження. Якщо матриця прирощень має нульові стовпці, то число визначників k -го порядку прирощень, що не дорівнюють нулю, менше C_n^k і дорівнює числу сполучень з p до k C_p^k , де p – число ненульових стовпців в матриці прирощень, $k = 1, 2, \dots, p$. Визначники k -го порядку прирощень при $k > p$ дорівнюють нулю. З урахуванням цього зауваження внаслідок того, що матриця прирощень чисельника має тільки один ненульовий стовпець (другий), $p = 1$, число визначників першого порядку прирощень $C_1^1 = 1$, а визначники 2-го і 3-го порядку прирощень дорівнюють нулю. Тоді

$$\delta D_{\text{ч}} = \frac{1}{B_{40}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -\Delta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{32}}{\bar{\rho}_{32}}.$$

Матриця прирощень знаменника містить два ненульових стовпця (перший і другий), $p = 2$, тому в прирощенні знаменника будуть ($C_2^1 = 2$) два визначника 1-го порядку прирощень і ($C_2^2 = 1$) один визначник 2-го порядку прирощень, $B_3 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \delta D_3 &= \frac{1}{B_{30}} \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\Delta_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_{43} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\bar{\rho}_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \Delta_{43} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\Delta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{43} & 1 \end{vmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{B_{30}} [\Delta_{32}\bar{\rho}_{43} + \Delta_{43}\bar{\rho}_{32} + \Delta_{32}\Delta_{43}] = \frac{\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} [\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43}], \end{aligned}$$

$$\text{де } \delta_{32} = \frac{\Delta_{32}}{\bar{\rho}_{32}}; \quad \delta_{43} = \frac{\Delta_{43}}{\bar{\rho}_{43}}; \quad B_0 = 1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43};$$

$$\delta k_{31} = \frac{\delta_{32} - \frac{\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} [\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43}]}{1 + \frac{\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} [\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43}]} = \frac{\delta_{32} - \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}\delta_{43} - \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}\delta_{32}\delta_{43}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43} + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43} [\delta_{32} + \delta_{43} + \delta_{32}\delta_{43}]}.$$

При $|\delta_{32}| \ll 1$ і $|\delta_{43}| \ll 1$

$$\delta k_{31} \cong \frac{\delta_{32}}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}} - \frac{\delta_{43}\bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}(1 + \delta_{32})}{1 + \bar{\rho}_{32}\bar{\rho}_{43}}.$$

1.4. Стохастична модель похибок засобів вимірювання

Матрична форма моделей засобів вимірювань і матрична форма детермінованого рівняння похибки дозволяють в машинопридатній формі перейти до імовірнісної моделі похибки і оцінити випадкові похибки.

Для визначення всіх нормованих характеристик випадкової похибки відповідно до ДСТУ ГОСТ 8.009:2008 досить розташовувати такими числовими показниками випадкової похибки, як математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення і закон розподілу густини імовірності, а для характеристики випадкових процесів – автокореляційною функцією і/або спектральною густиною.

Як було показано вище, похибка засобу вимірювання, модель якого задана як відношення визначників:

$$\delta_{зв} = \frac{\delta_ч - \delta_з}{1 + \delta_з}, \quad (1.44)$$

де $\delta_ч$, $\delta_з$ – відносні похибки чисельника і знаменника, які становлять відносні прирощення відповідних визначників.

Відносне прирощення визначника представляється сумою $(2^n - 1)$ визначників k -го порядку прирощень ($k=1 \dots n$) і є функцією похибок елементів визначника:

$$\delta = F(\delta_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.45)$$

Нехай $\overset{\circ}{\delta}_{ij}$ є випадкові складові похибок елементів матриці і задані математичними сподіваннями $M\{\overset{\circ}{\delta}_{ij}\}$, дисперсіями $D\{\overset{\circ}{\delta}_{ij}\}$, законами розподілу густини імовірності $P(\overset{\circ}{\delta}_{ij})$, а також коваріаціями $\text{cov}(\overset{\circ}{\delta}_{ij}, \overset{\circ}{\delta}_{pq})$. Необхідно знайти числові та функціональні характеристики похибки визначника:

$$M\{\overset{\circ}{\delta}\} = M\left\{F\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)\right\}; \quad D\{\overset{\circ}{\delta}\} = D\left\{F\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)\right\};$$

$$P\left(\overset{\circ}{\delta}\right) = P\left[F\left(\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right)\right], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Стохастична модель похибок утворюється з детермінованою, якщо у виразі (1.43) похибки вважати випадковими величинами, позначивши їх $\overset{\circ}{\delta}$.
Тоді

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\delta} = F(\overset{\circ}{\delta}_{ij}) &= \sum_1^{nC'_n} \overset{\circ}{\delta}_{ij} C_{ij}^1 + \sum_1^{n(n-1)C_n^2} \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq} C_{ij,pq}^l + \\ &+ \sum_1^{n(n-1)(n-2)C_n^3} \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq} \overset{\circ}{\delta}_{lm} C_{ij,pq,lm}^3 + \dots + \sum_1^{n!C_n^n} C_{ij}^n \prod_1^n \overset{\circ}{\delta}_{ij}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Рівняння (1.46) дозволяє точно обчислити похибку визначника при будь-яких значеннях похибки $\overset{\circ}{\delta}_{ij}$, але в більшості випадків для практичних цілей достатньо обліку похибок 1-го порядку малості, а для засобів вимірювань, що працюють за принципом інваріантності, і 2-го порядку малості. За структурою рівняння (1.46) являє собою суму

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i \delta. \quad (1.47)$$

Математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань доданків, тобто

$$m_y = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} \delta.$$

Дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій плюс подвоєні коваріації доданків, тобто

$$D_y = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} + 2 \sum a_i a_j r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}. \quad (1.48)$$

При великому числі доданків відповідно до граничних теорем закон розподілу сумарного розподілу близький до нормального і повністю характеризується своїми математичним сподіванням і дисперсією.

У формулі (1.46), усіченої до членів 2-го порядку прирощень, характерними складовими є добутки двох випадкових величин $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}$, а також завідомо корельовані доданки

$$\overset{\circ}{\delta}_{ij} + \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}, \quad \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq} + \overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{lm}. \quad (1.49)$$

Тому знайдемо вираз для математичного сподівання і дисперсії добутку, а також коваріацію величин $\overset{\circ}{\delta}_{ij}$ і $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}$, $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{pq}$ і $\overset{\circ}{\delta}_{ij} \overset{\circ}{\delta}_{lm}$.

Нехай x_1, x_2, x_3 – у загальному випадку три залежні випадкові величини з коефіцієнтами кореляції r_{12}, r_{13}, r_{23} , математичними сподіваннями $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}$, і дисперсіями $D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}$. Також нехай

$$x_1 = \tilde{x}_1 + m_{x_1}; \quad x_2 = \tilde{x}_2 + m_{x_2}, \quad x_3 = \tilde{x}_3 + m_{x_3},$$

де \tilde{x} – центрована випадкова величина.

Тоді

$$\begin{aligned} M \{x_1 x_2\} &= M \left\{ (\tilde{x}_1 + m_{x_1})(\tilde{x}_2 + m_{x_2}) \right\} = \\ &= M \left\{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 m_{x_1} + \tilde{x}_1 m_{x_2} + m_{x_1} m_{x_2} \right\} = M \{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \} + m_{x_1} m_{x_2}. \end{aligned}$$

Відповідно до визначення

$$M \{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \} = \text{cov}(x_1, x_2) = r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}.$$

Тому

$$M \{x_1 x_2\} = m_{x_1} m_{x_2} + r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}. \quad (1.50)$$

Для добутку незалежних величин

$$M \{x_1 x_2\} = m_{x_1} m_{x_2}. \quad (1.51)$$

Для центрованих залежних

$$M \{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \} = r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}. \quad (1.52)$$

Дисперсія добутку

$$\begin{aligned} D \{x_1 x_2\} &= M \left\{ (x_1 x_2 - M \{x_1 x_2\})^2 \right\} = M \left\{ (x_1 x_2)^2 \right\} - [M \{x_1 x_2\}]^2 = \\ &= M \left\{ (\tilde{x}_1 + m_{x_1})^2 (\tilde{x}_2 + m_{x_2})^2 \right\} - (m_{x_1} m_{x_2} + r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2})^2 = \\ &= M \left\{ \begin{aligned} &\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 m_{x_1} + \tilde{x}_2^2 m_{x_1}^2 + 2\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 m_{x_2} + 4\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 m_{x_1} m_{x_2} + \\ &+ 2\tilde{x}_2 m_{x_2} m_{x_1}^2 + \tilde{x}_1^2 m_{x_2}^2 + 2\tilde{x}_1 m_{x_1} m_{x_2}^2 + m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 - m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 - \\ &- 2m_{x_1} m_{x_2} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - r_{12}^2 \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Позначаючи центральні моменти порядку $k_1 + k_2$ через

$$\rho_{x_1 x_2}^{k_1 k_2} = M \left\{ (x_1 - m_{x_1})^{k_1} (x_2 - m_{x_2})^{k_2} \right\},$$

а також враховуючи те, що математичні сподівання центрованих випадкових величин дорівнюють нулю, отримаємо

$$\begin{aligned} D \{x_1 x_2\} &= m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + \rho_{x_1 x_2}^{1 1} + 2m_{x_1} \rho_{x_1 x_2}^{1 2} + 2m_{x_2} \rho_{x_1 x_2}^{2 1} + \\ &+ 2m_{x_1} m_{x_2} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - r_{12}^2 D_{x_1} D_{x_2}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Центральні моменти порядку $k_1 + k_2$ можуть бути обчислені через спільні густини ймовірності.

Для незалежних величин коефіцієнт кореляції, а також змішані центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю, тому

$$D\{x_1 x_2\} = m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + D_{x_1} D_{x_2} \quad (1.54)$$

Для центрованих залежних величин

$$D\{x_1 x_2\} = \rho_{x_1^2 x_2^2} - r_{12}^2 D_{x_1} D_{x_2}. \quad (1.55)$$

Для нормально розподілених величин центральні моменти будь-якого непарного порядку дорівнюють нулю, а центральний момент будь-якого парного порядку можна виразити через відповідні моменти 2-го порядку, тому

$$D\{x_1 x_2\} = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 D_{x_1} + 2m_{x_1} m_{x_2} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + (1 - r_{12}^2) D_{x_1} D_{x_2}. \quad (1.56)$$

Знайдемо коваріацію випадкових величин x_1 і $x_1 x_2$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_1, x_1 x_2) &= M\left\{(x_1 - m_{x_1})(x_1 x_2 - M\{x_1 x_2\})\right\} = \\ &= M\{x_1^2 x_2\} - m_{x_1} M\{x_1 x_2\} = M\left\{(\tilde{x}_1 + m_{x_1})^2 (\tilde{x}_2 + m_{x_2})\right\} - \\ &\quad - m_{x_1}^2 m_{x_2} - m_{x_1} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} = \rho_{x_1^2 x_2} + m_{x_1} r_{12} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} + m_{x_2} D_{x_1}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Для незалежних величин x_1 і x_2

$$\text{cov}(x_1, x_1 x_2) = m_{x_2} D_{x_1}. \quad (1.58)$$

Для центрованих

$$\text{cov}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1 \tilde{x}_2) = \rho_{\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2} = \text{cov}(\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2). \quad (1.59)$$

З (1.56) і (1.52) отримаємо коефіцієнт кореляції

$$r_{x_1, x_1 x_2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_1 x_2)}{\sigma_{x_1} \sqrt{D\{x_1 x_2\}}}. \quad (1.60)$$

Для незалежних x_1, x_2 з (1.60), (1.53, 1.57) отримаємо

$$r_{x_1, x_1 x_2} \frac{m_{x_2} \sigma_{x_1}}{\sqrt{m_{x_1}^2 D_{x_2} + m_{x_2}^2 D_{x_1} + D_{x_1} D_{x_2}}} = \left(1 + \frac{m_{x_1}^2 D_{x_2}}{m_{x_2}^2 D_{x_1}} + \frac{D_{x_2}}{m_{x_2}^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.61)$$

З (1.61) видно, що для центрованої величини x_2 , тобто при $m_{x_2} \rightarrow 0$, коефіцієнт кореляції x_1 і $x_1 x_2$ також прямує до нуля. При великих значеннях m_{x_2} , в порівнянні з дисперсією D_{x_2} , m_{x_1} коефіцієнт кореляції прямує до одиниці.

Можна показати, що дисперсія добутку трьох незалежних величин

$$D\{x_1x_2x_3\} = m_{x_2}^2 m_{x_3}^2 D_{x_1} + m_{x_1}^2 m_{x_3}^2 D_{x_2} + m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 D_{x_3} + m_{x_3}^2 D_{x_1} D_{x_2} + \\ + m_{x_2}^2 D_{x_1} D_{x_3} + m_{x_1}^2 D_{x_3} D_{x_2} + D_{x_1} D_{x_2} D_{x_3}. \quad (1.62)$$

Дисперсія добутку n незалежних величин може бути виражена аналогічно (1.62) як сума добутків квадратів математичних сподівань і дисперсій. Формула (1.62) отримана шляхом розкладання $x_1x_2x_3$ в ряд Тейлора в точках $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}$:

$$\text{cov}(x_1x_2, x_1x_3) = \rho_{x_1^2x_2x_3} + 2m_{x_1}\rho_{x_1x_2x_3} + m_{x_1}^2 r_{23}\sigma_{x_2}\sigma_{x_3} + m_{x_3}\rho_{x_1^2x_2} + \\ + m_{x_1}m_{x_3}r_{12}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} + m_{x_2}m_{x_3}D_{x_1} - r_{13}r_{12}D_{x_1}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}. \quad (1.63)$$

Для незалежних x_1, x_2, x_3

$$\text{cov}(x_1, x_2, x_1x_3) = m_{x_2}m_{x_3}D_{x_1}. \quad (1.64)$$

Таким чином, отримано математичні сподівання, дисперсії і коваріації доданків формули (1.46), обмеженою членами 2-го порядку прирощень включно.

Підставляючи в (1.47) і (1.48) відповідні значення математичних сподівань, дисперсій і коваріацій доданків формули (1.45), отримаємо математичні сподівання і дисперсії випадкової похибки засобу вимірювання.

Для прикладу знайдемо $M\{\delta_{61}\}$ і $D\{\delta_{61}\}$ пристрою, показаного на рис. 1.9, скориставшись формулою (1.43), вважаючи похибки незалежними.

Позначаючи $M\left\{\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right\} = m_{ij}$ і $D\left\{\overset{\circ}{\delta}_{ij}\right\} = D_{ij}$, з (1.43), (1.51), (1.54), (1.58),

(1.64) отримаємо:

$$m_{61} = -m_{32}(1 + m_{21} + m_{54}) - m_{21}m_{54}; \\ D_{61} = D_{32} + m_{21}^2 D_{54} + m_{54} D_{21} + D_{54} D_{21} + m_{32}^2 D_{21} + m_{21}^2 D_{32} + D_{21} D_{32} + m_{32}^2 D_{54} + m_{54}^2 D_{32} + \\ + D_{54} D_{32} + 2(m_{21} D_{32} + m_{54} D_{32} + m_{54} m_{32} D_{21} + m_{21} m_{32} D_{54} + m_{21} m_{54} D_{32}).$$

Для засобів вимірювання інтегруючого перетворення випадкові похибки являють собою інтегральні вибірки випадкового процесу погрішності як випадкової функції часу [3].

Математичне сподівання таких вибірок для нестационарного випадкового процесу

$$M\{\xi_i\} = M\left\{\frac{1}{T_u} \int_{t_0}^{t_0+T_u} \xi(t) dt\right\} = \frac{1}{T_u} \int_{t_0}^{t_0+T_u} m(t) dt,$$

$$D\{\xi_i\} = \frac{1}{T_u^2} \iint_{t_0}^{t_0+T_u} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - M^2\{\xi_i\},$$

де $R(t_1, t_2)$ – автокореляційна функція нестационарного процесу.

Якщо випадковий процес похибки стаціонарний, тоді

$$M\{\xi_i\} = 0; \quad D\{\xi_i\} = \frac{2}{T_u} \int_0^{T_u} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) d\tau,$$

де $R(\tau)$ – автокореляційна функція ергодичного процесу.

1.5. Динамічні характеристики засобів вимірювань

Як зазначалося вище, згідно ДСТУ ГОСТ 8.009:2008, в якості динамічних характеристик засобів вимірювань вибирається одна з наступних повних характеристик: диференціальні рівняння, перехідна характеристика, імпульсна перехідна характеристика або амплітудно-фазочастотна характеристика. У більшості випадків нормуються часткові динамічні характеристики – час встановлення, амплітудно-частотна характеристика, фазочастотна характеристика, параметри вхідного імпедансу.

Аналітичним шляхом часткові характеристики отримують з повних, тому на етапі проектування необхідне знання повних динамічних характеристик. Часткові динамічні характеристики відносно просто визначаються експериментальним шляхом.

Найбільш повно динамічні властивості описуються диференціальними рівняннями, оскільки це придатне як для лінійних, так і нелінійних систем. Однак слід зазначити, що не існує загального аналітичного способу розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, за винятком ряду спеціальних нелінійних рівнянь, для яких є точні розв'язання, тому широкого поширення набули асимптотичні методи розв'язання і дослідження нелінійних диференціальних рівнянь [5]. Останнім часом стали використовуватися чисельні методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь [6, 7].

Поняття перехідної, імпульсної перехідної й амплітудно-частотної характеристик під час точного розгляду відноситься до лінійних в просторі сигналів вимірювальних кіл, а оскільки такі кола широко застосовуються, то розглянемо спосіб складання цих характеристик.

Перехідна характеристика є функцією часу і становить собою перехідну реакцію вимірювального лінійного вихідний сигнал у вигляді одиначної ступінчастої функції за нульових початкових умов.

В операторній формі

$$y(p) = \frac{x_0}{p} W(p), \quad (1.65)$$

де x_0/p – зображення стрибка вхідного сигналу; $W(p)$ – передавальна функція вимірювального кола.

Передавальна функція $W(p)$ вимірювального кола, що дорівнює відношенню зображення $y(p)$ вихідного сигналу до зображення вхідного сигналу $x(p)$, тобто $W(p) = y(p)/x(p)$, при нульових початкових умовах може бути отримана в матричній формі аналогічно тому, як вище отримані статичні характеристики засобів вимірювань, якщо коефіцієнти передачі перетворювальних елементів представити в операторній формі – вважати ρ_{ji} – функції оператора p , тобто $\rho_{ji}(p)$, а також змінні x_i представити функціями оператора p , тобто $x_i(p)$.

Тоді матричний запис передавальної функції буде мати вигляд

$$[\rho(p)][x(p)] = [x_n(p)], \quad (1.66)$$

де $[\rho(p)]$ – квадратна матриця коефіцієнтів; $[x(p)]$ – матриця-стовпець змінних; $[x_n(p)]$ – матриця-стовпець правих частин.

Маючи передавальну функцію, за формулою (1.65) знаходимо зображення вихідного сигналу, а застосувавши зворотне перетворення, знаходимо перехідну характеристику.

Як приклад розглянемо перехідну характеристику пристрою, зображеного на рис. 1.9, вважаючи перетворюючі елементи динамічними. Структурна схема пристрою зображена на рис. 1.24.

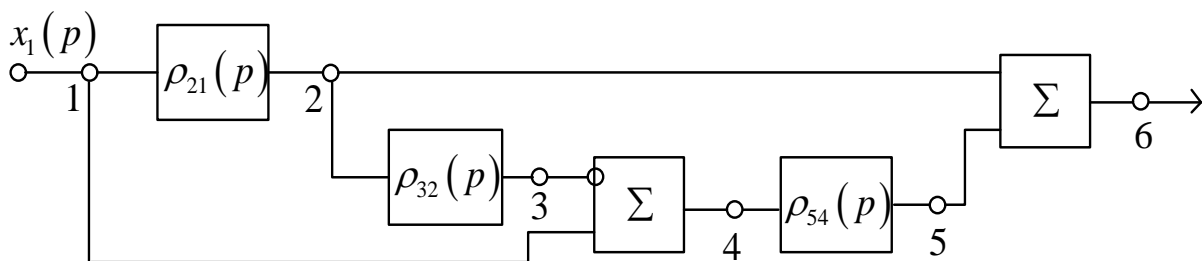


Рисунок 1.24 – Структурна схема пристрою з адитивною корекцією та динамічними перетворювальними елементами

Матричний запис динамічної характеристики

<i>i j</i>	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	$-\rho_{21}(p)$	1	0	0	0	0
3	0	$-\rho_{32}(p)$	1	0	0	0
4	-1	0	1	1	0	0
5	0	0	0	$-\rho_{54}(p)$	1	0
6	0	-1	0	0	-1	1

$x_1(p)$
$x_2(p)$
$x_3(p)$
$x_4(p)$
$x_5(p)$
$x_6(p)$

$x_1(p)$
0
0
0
0
0

↑
↑
↑

Матриця передавальних функцій
Матриця змінних
Матриця правих частин

Передавальна функція

$$W(p) = \frac{x_6(p)}{x_1(p)} = \frac{\det \delta(p)}{\det 1(p)} = \rho_{21}(p) + \rho_{54}(p) - \rho_{21}(p)\rho_{54}(p)\rho_{32}(p).$$

Хай $\rho_{21}(p)$ і $\rho_{54}(p)$ містять по одній інтегруючій ланці, а $\rho_{32}(p)$ безінерційну ланку, тобто

$$\rho_{21}(p) = \rho_{21} \frac{1}{1 + \rho\tau}; \quad \rho_{54}(p) = \rho_{54} \frac{1}{1 + \rho\tau_{54}}; \quad \rho_{32}(p) = \rho_{32}.$$

Якщо $x_1(p) = x_{01} / p$, то зображення перехідної характеристики

$$x_6(p) = \frac{x_{01}}{p} \left[\frac{\rho_{21}}{1 + \rho\tau_{21}} + \frac{\rho_{54}}{1 + \rho\tau_{54}} - \frac{\rho_{21}\rho_{54}\rho_{32}}{(1 + \rho\tau_{21})(1 + \rho\tau_{54})} \right],$$

а відповідна йому перехідна нормована характеристика має вигляд

$$\frac{x_6(t)}{x_{01}} = \rho_{21}(1 - e^{a_1 t}) + \rho_{54}(1 - e^{a_2 t}) - \rho_{21}\rho_{54}\rho_{32} \left(1 - \frac{a_2 e^{a_1 t} - a_1 e^{a_2 t}}{a_1 - a_2} \right),$$

де $a_1 = -\frac{1}{\tau_{21}}; a_2 = -\frac{1}{\tau_{54}}.$

Час установлення t_{ycm} є найбільшим коренем рівняння

$$\frac{x_{вих}(t)}{x_{вих}(t \rightarrow \infty)} = 1 \pm \gamma,$$

де γ – задана зона відхилення від усталеного режиму. На рис. 1.25 $t_{ycm} = t_5$, оскільки після закінчення часу t_5 перехідна характеристика не виходить за межі зони похибки 2γ

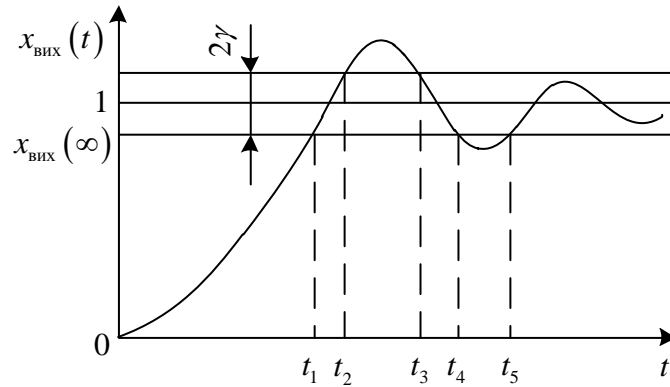


Рисунок 1.25 – Перехідна характеристика

Серед часткових нормованих метрологічних характеристик вимірювальних пристроїв найбільш поширені амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики.

Як зазначалося вище, ці характеристики мають сенс для лінійних в просторі сигналів вимірювальних кіл. Нелінійні в просторі сигналів кола збагачують спектр вихідного сигналу. У ряді випадків під час аналізу нелінійних кіл під частотною характеристикою розуміють відповідні співвідношення між сигналами першої гармоніки.

Амплітудно-частотну і фазочастотну характеристики отримують з передавальної функції шляхом заміни оператора p комплексної змінної $j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$.

У загальному вигляді передавальна функція задається у вигляді відношення двох поліномів змінної p або $j\omega$:

$$W(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}, \quad (1.67)$$

або

$$W(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^i}, \quad (1.68)$$

де непарні значення $i = 1, 3, 5, \dots$ утворюють уявну частину доданків, а парні $i = 0, 2, 4, \dots$ – їхню дійсну частину.

Нагадаємо, що модуль відношення комплексних чисел дорівнює відношенню їхніх модулів, модуль добутку дорівнює добутку модулів, а фазовий зсув відношення двох комплексних чисел дорівнює різниці фаз чисельника та знаменника, фазовий зсув добутку комплексних чисел дорів-

нює сумі фазових зрушень. Це впливає з уявлення комплексних чисел в полярній системі координат

$$\rho(j\omega) = \rho_1(j\omega) \dots \rho_n(j\omega) = |\rho_1(j\omega)| \dots \rho_n(j\omega) e^{j(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)}. \quad (1.69)$$

Для підготовки алгоритму обчислення амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик доцільно представити їхнє вираження в найбільш зручній для алгоритмізації формі.

Для цього скористаємося формулою (1.66). Зведення числа $j = \sqrt{-1}$ у ступінь дає значення $+j$ при $i = 1, 5, 9, \dots$; $-j$ при $i = 3, 7, 11, \dots$; 1 при $i = 0, 4, 8, 12, \dots$; -1 при $i = 2, 6, 10, \dots$, тобто

$$j^k = j \quad \text{при } k = 4 \cdot i + 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$j^l = -j \quad \text{при } l = 4 \cdot i + 3, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$j^p = 1 \quad \text{при } p = 4 \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$j^q = -1 \quad \text{при } q = 4 \cdot i + 2, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Враховуючи цей вираз, (1.66) можна представити часткові суми дійсної та уявної складових чисельника і знаменника:

$$W(j\omega) = \frac{\sum_{i=0,2,4}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^{i-1} a_i \omega^i}{\sum_{i=0,2,4}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^{i-1} b_i \omega^i}, \quad (1.70)$$

або

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \\ &= \frac{\sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-4}{4} \leq i \leq \frac{n}{4}} a_{4i} \omega^{4i} - \sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-6}{4} \leq i \leq \frac{n-2}{4}} b_{4i+2} \omega^{4i+2} + j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-5}{4} \leq i \leq \frac{n-1}{4}} a_{4i+1} \omega^{4i+1} - j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{n-7}{4} \leq i \leq \frac{n-3}{4}} a_{4i+3} \omega^{4i+3}}{\sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-4}{4} \leq i \leq \frac{m}{4}} b_{4i} \omega^{4i} - \sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-6}{4} \leq i \leq \frac{m-2}{4}} b_{4i+2} \omega^{4i+2} + j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-5}{4} \leq i \leq \frac{m-1}{4}} b_{4i+1} \omega^{4i+1} - j \sum_{i=0,1,2}^{\frac{m-7}{4} \leq i \leq \frac{m-3}{4}} b_{4i+3} \omega^{4i+3}} \end{aligned} \quad (1.71)$$

або

$$W(j\omega) = \frac{A_r(\omega) + jA_l(\omega)}{B_r(\omega) + jB_l(\omega)}, \quad (1.72)$$

де $A_r(\omega)$ і $B_r(\omega)$ – дійсні частини чисельника та знаменника; $A_l(\omega)$, $B_l(\omega)$ – уявні частини чисельника та знаменника відповідно.

Амплітудно-частотна характеристика описується виразом

$$|W(j\omega)| = \sqrt{\frac{[A_r(\omega)]^2 + [A_l(\omega)]^2}{[B_r(\omega)]^2 + [B_l(\omega)]^2}}, \quad (1.73)$$

Фазочастотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{A_l(\omega)}{A_r(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{B_l(\omega)}{B_r(\omega)}. \quad (1.74)$$

За виглядом частотної характеристики вимірювальні пристрої можна поділити на дві групи: першу, в якій мінімізується відхилення частотної характеристики від постійного значення в деякій точці ω_0 , тобто мінімізується частотна похибка, і другу, в якій частотна характеристика має спеціальну форму і нормується ця форма теж відносно деякої частоти ω_0 .

Перша група приладів більш показна, до неї відносяться амперметри, вольтметри, ватметри, фазометри, підсилювачі, осцилографи, вимірювачі амплітудно-частотних характеристик, атенюатори, генератори тощо.

До другої групи належать селективні вольтметри, аналізатор спектру, вимірювальні приймачі, інтегратори, диференціатори тощо.

Для зручності представлення та розрахунків частотна характеристика часто подається у відносних одиницях як по осі абсцис, так і по осі ординат.

За віссю частот береться відношення

$$\omega / \omega_0 = \Omega, \quad (1.75)$$

причому $\Omega_0 = 1$, де ω_0 – деяка початкова частота.

За віссю ординат береться відношення

$$k_F = \frac{|W(j\omega)|}{|W(j\omega_0)|}. \quad (1.76)$$

Величини Ω і k_F часто представляються в логарифмічному масштабі.

Частотна похибка

$$\gamma_F = k_F - 1. \quad (1.77)$$

Тоді вираз (1.68) набуде вигляду

$$W(j\Omega) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \omega_0^i (j\Omega)^i}{\sum_{i=0}^m b_i \omega_0^i (j\Omega)^i}; \quad (1.78)$$

а вираз (1.70) – вигляду

$$W(j\Omega) = \frac{\sum_{i=0,2,4}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i}{\sum_{i=0,2,4}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i + j \sum_{i=1,3,5}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i}. \quad (1.79)$$

Враховуючи те, що модуль частотної характеристики дорівнює кореню квадратному з квадратів дійсної та уявної складових, то за малих частотних похибок останню доцільно знаходити за формулами наближеного обчислення від квадрата модуля частотної характеристики.

З (1.77)

$$k_F^2 = (1 + \gamma_F)^2,$$

Звідки

$$\gamma_F \approx \frac{k_r^2 - 1}{2}.$$

За малих частотних похибок, їй можна надати більш наочну форму.

Для цього зробимо нормування у виразі (1.72), розділивши ліву та праву частини на модуль коефіцієнта передачі на частоті калібрування Ω_0 :

$$k_F = \frac{W(j\Omega)}{|W(j\Omega_0)|} = \frac{A_r(\Omega) + jA_I(\Omega)}{|W(j\Omega_0)|B_r(\Omega) + j|W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)}, \quad (1.81)$$

де

$$A_r(\Omega) = \sum_{i=0,2,4}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i; \quad A_I(\Omega) = \sum_{i=1,3,5}^{n-1 \leq i \leq n} (\sqrt{-1})^i a_i \omega_0^i \Omega^i;$$

$$B_r(\Omega) = \sum_{i=0,2,4}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i; \quad B_I(\Omega) = \sum_{i=1,3,5}^{m-1 \leq i \leq m} (\sqrt{-1})^i b_i \omega_0^i \Omega^i.$$

Вираз (1.81) тотожно перетворимо до вигляду

$$k_F = 1 + \frac{A_r(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_r(\Omega) + j[A_I(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)]}{|W(j\Omega_0)|B_r(\Omega) + j|W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)}. \quad (1.82)$$

Другий доданок у виразі (1.82) є комплексною похибкою коефіцієнта k_F з модулем і аргументом:

$$|\Delta k_F| = \sqrt{\frac{[A_r(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_r(\Omega)]^2 + [A_I(\Omega) - |W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)]^2}{[|W(j\Omega_0)|B_r(\Omega)]^2 + [|W(j\Omega_0)|B_I(\Omega)]^2}}; \quad (1.83)$$

$$\varphi_{\Delta} = \arctg \frac{A_I(\Omega) - |W(j\Omega_0)| B_I(\Omega)}{A_r(\Omega) - |W(j\Omega_0)| B_r(\Omega)} - \arctg \frac{B_I(\Omega)}{B_r(\Omega)}. \quad (1.84)$$

Ортогональні складові вектора похибки:

$$\begin{aligned} (\Delta k_F)_r &= |\Delta k_F| \cos \varphi_{\Delta}; \\ (\Delta k_F)_I &= |\Delta k_F| \sin \varphi_{\Delta}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Геометрична інтерпретація виразу (1.81) представлена на рис. 1.26.

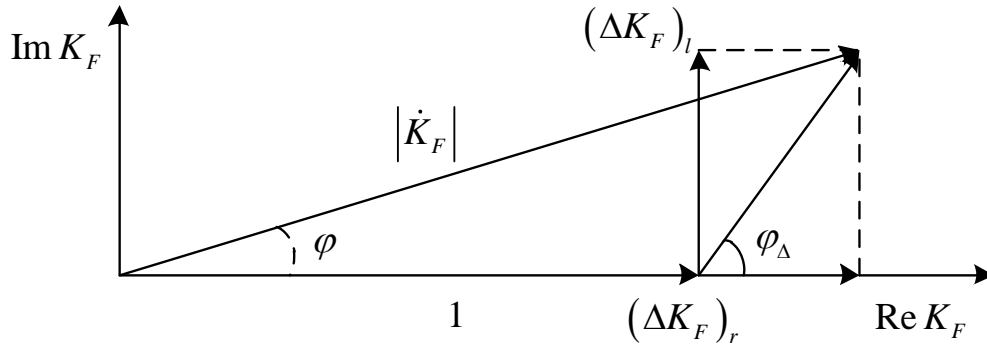


Рисунок 1.26 – Геометрична інтерпретація частотної похибки

За малих частотних похибок орієнтовно можна вважати, що похибка модуля

$$\gamma_F = |k_F| - 1 \approx (\Delta k_F)_r, \quad (1.86)$$

фазова похибка

$$\varphi \approx \arctg (\Delta k_F)_I. \quad (1.87)$$

1.6. Похибка визначення коефіцієнтів поліноміальної моделі за результатами експерименту (похибка за наявності залежних елементів в матриці системи)

Вище було отримано загальний вираз для абсолютної похибки визначника залежно від похибок його елементів

$$\Delta D = F(\Delta_{ij}). \quad (1.88)$$

Елементи a_{ij} визначника можуть бути залежними. В цьому разі слід знайти прирощення елемента a_{pq} , залежного від елемента a_{ij} , як функцію прирощення Δ_{ij} , тобто

$$\Delta_{pq} = \varphi(\Delta_{ij}). \quad (1.89)$$

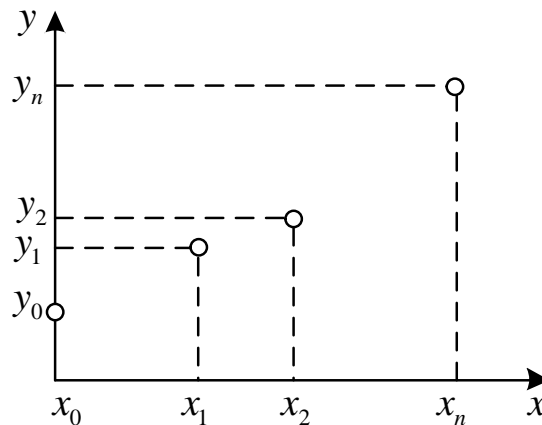


Рисунок 1.27 – Вузлові точки експериментальної залежності

Розглянемо приклад визначення похибки коефіцієнтів регресії поліноміальної моделі за результатами експерименту.

Нехай в наслідок експерименту зняті вузлові точки деякої залежності (рис. 1.27), невідомої до проведення експерименту:

$$y = \varphi(x), \quad (1.90)$$

і зведені в таблицю

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

(1.91)

Нехай також як апроксимуюча обрана поліноміальна залежність порядку n

$$y = P_n(x), \quad (1.92)$$

тобто

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (1.93)$$

або

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Похибка апроксимації має дві складові: першу, обумовлену обмеженістю порядку полінома, і другу, зумовлену похибками визначення координат вузлових точок.

Перша складова похибки досліджена дуже докладно [6, 7] за умови, що вузлові точки одночасно належать як апроксимуючій залежності, так і апроксимуючій функції (у цьому разі поліному). Іншими словами, апроксимуюча функція обов'язково проходить через вузли апроксимуємої залежності. Відхилення апроксимуючої й апроксимуємої залежностей оцінюється виходячи з різних критеріїв, найчастіше максимальним відхиленням або середньоквадратичним відхиленням, або іншими інтегральними відхиленнями.

Друга складова завжди реалізується за експериментального визначення координат вузлових точок і обумовлена похибками завдання або змін аргументів x_i і вимірювання, або встановлення значень функції y_i .

Коефіцієнти полінома a_i , які часто називають коефіцієнтами регресії, знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n; \\ y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n; \\ y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n; \\ \dots \\ y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n. \end{cases} \quad (1.94)$$

Система (1.94) містить $(n+1)$ рівняння відносно $(n+1)$ невідомих, якими є коефіцієнти a_i .

Для автоматизованого розв'язку системи (1.94) відносно a_i ($i = 0 \dots n$), а також визначення похибок Δa_i залежно від похибок x_i і y_i , як було показано вище, доцільно систему (1.94) записати у матричній формі.

Матриця системи буде мати порядок $n+1$:

ij	1	2	3	j	$n+1$
1	1	x_0	x_0^2		x_0^n
2	1	x_1	x_1^2		x_1^n
3	1	x_2	x_2^2		x_2^n
i	$x_{i-1}^{(j-1)}$...
$n+1$	1	x_n	x_n^2		x_n^n

 \times

a
a_0
a_1
a_2
a_{i-1}
a_n

 $=$

y_1
y_0
y_1
y_2
y_{i-1}
y_n

(1.95)

Її коефіцієнти визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{\det 1}{\det C}, \quad a_1 = \frac{\det 2}{\det C}, \quad a_{i-1} = \frac{\det i}{\det C}, \quad (1.96)$$

де $\det C$ – визначник системи (1.95); $\det i$ – визначник системи, в якій i -й стовпець замінений матрицею стовпцем y_i правих частин рівнянь системи (1.94).

Для знаходження похибок a_{i-1} необхідно знати похибки визначника $\det i$ і визначника системи $\det C$, оскільки відносна похибка a_{i-1}

$$\delta a_{i-1} = \frac{\delta \det i - \delta \det C}{1 + \delta \det C}. \quad (1.97)$$

Для знаходження похибок визначників необхідно знати матрицю похибок визначників $\det i$ і $\det C$ або/і матрицю похибок y_i .

Визначником системи є визначник Вандермонда. Матриця похибок для нього з урахуванням тільки перших наближень має вигляд

ij	1	2	3	j	$n+1$
1	0	Δ_0	$2\bar{x}_0\Delta_0$		$n\bar{x}_0^{n-1}\Delta_0$
2	0	Δ_1	$2\bar{x}_1\Delta_1$		$n\bar{x}_1^{n-1}\Delta_1$
3	0	Δ_2	$2\bar{x}_2\Delta_2$		$n\bar{x}_2^{n-1}\Delta_2$
i	0	Δ_{i-1}	$2\bar{x}_{i-1}\Delta_{i-1}$	$(j-1)x_{i-1}^{-j-2}\Delta_{i-1}$	$n\bar{x}_{i-1}^{n-1}\Delta_{i-1}$
$n+1$	0	Δ_n	$2\bar{x}_n\Delta_n$		$n\bar{x}_n^{n-1}\Delta_n$

(1.98)

де \bar{x}_i – номінальне значення; Δ_i – похибка $x_i = \bar{x}_i + \Delta_i$.

Матриця-стовпець прирощень y_i складається з Δy_i ($i = 0, \dots, n$).

За необхідності більш точного визначення похибок слід користуватися прирощенням елементів, отриманих на основі розкладання бінома Ньютона.

Нехай $x_i = \bar{x}_i + \Delta_i = \bar{x}_i(1 + \delta_i)$, де $\delta_i = \frac{\Delta_i}{\bar{x}_i}$ – відносна похибка.

Тоді:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \bar{x}_i(1 + \delta_i); \\
 x_i^2 &= \bar{x}_i^2(1 + \delta_i)^2 = \bar{x}_i^2(1 + 2\delta_i + \delta_i^2); \\
 x_i^3 &= \bar{x}_i^3(1 + \delta_i)^3 = \bar{x}_i^3(1 + 3\delta_i + 3\delta_i^2 + \delta_i^3); \\
 &\dots; \\
 x_i^n &= \bar{x}_i^n(1 + \delta_i)^n = \bar{x}_i^n(1 + C_n^1\delta_i + C_n^2\delta_i^2 + C_n^3\delta_i^3 + \dots + C_n^n\delta_i^n).
 \end{aligned}
 \tag{1.99}$$

Число сполучень з n до k ($k = 1, \dots, n$) легко знаходиться з трикутника Паскаля.

Загальний член матриці похибок, виражений через відносні похибки при врахуванні перших наближень:

$$\Delta_{ij} = (j-1)\bar{x}_{i-1}^{j-1}\delta_{i-1}, \tag{1.100}$$

Де i та j – номери рядків і стовпців матриці похибок визначника системи; $i = (1, \dots, n+1)$; $j = (1, \dots, n+1)$; n – порядок полінома.

За необхідності врахування більш високих наближень слід користуватися формулами (1.99).

З матричного рівняння (1.95) за формулами (1.96) можна отримати коефіцієнти полінома a_i , а з матриці номінальних значень і матриці похибок визначника системи та матриці похибок правих частин похибки визначника $\det i$

$$B_1 = \sum_{l=1}^n D_{n,l}^1. \tag{1.101}$$

Приклад. Необхідно знайти коефіцієнти апроксимуючого полінома експериментально отриманої залежності.

Нехай апроксимуючий поліном має третій порядок ($n = 3$). В такому разі число вузлів дорівнює $n+1=4$, розмірність матриці коефіцієнтів $(n+1) \times (n+1) = 4 \times 4$.

Запишемо рівняння полінома

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Вважаючи x_0, x_1, x_2, x_3 і y_0, y_1, y_2, y_3 відомими, а a_0, a_1, a_2, a_3 невідомими, запишемо на основі (1.95) в матричній формі систему рівнянь для визначення a_q :

$$\begin{array}{c|cccc}
i & j & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\
2 & & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\
3 & & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\
4 & & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3
\end{array}
\times
\begin{array}{c}
a_i \\
\hline
a_0 \\
a_1 \\
a_2 \\
a_3
\end{array}
=
\begin{array}{c}
y_i \\
\hline
y_0 \\
y_1 \\
y_2 \\
y_3
\end{array}.
\quad (1.102)$$

З (1.102) отримаємо:

$$a_0 = \frac{\det 1}{\det c}; \quad a_1 = \frac{\det 2}{\det c}; \quad a_2 = \frac{\det 3}{\det c}; \quad a_3 = \frac{\det 4}{\det c}. \quad (1.103)$$

З (1.102), згідно (1.98) і (1.100), отримаємо матрицю похибок визначника системи та матрицю-стовпець похибок правих частин

$$A\Delta \det c =
\begin{array}{c|cccc}
ij & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & \bar{x}_0\delta_0 & 2\bar{x}_0^2\delta_0 & 3\bar{x}_0^3\delta_0 \\
2 & 0 & \bar{x}_1\delta_1 & 2\bar{x}_1^2\delta_1 & 3\bar{x}_1^3\delta_1 \\
3 & 0 & \bar{x}_2\delta_2 & 2\bar{x}_2^2\delta_2 & 3\bar{x}_2^3\delta_2 \\
4 & 0 & \bar{x}_3\delta_3 & 2\bar{x}_3^2\delta_3 & 3\bar{x}_3^3\delta_3
\end{array};
\quad Ay =
\begin{array}{c}
\Delta y_0 \\
\Delta y_1 \\
\Delta y_2 \\
\Delta y_3
\end{array}. \quad (1.104)$$

Запишемо визначники

$$\det 1 =
\begin{vmatrix}
y_0 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\
y_1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\
y_2 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & x_3 & x_3^2 & x_3^3
\end{vmatrix};
\quad \dots; \quad \det 4 =
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\
1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\
1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\
1 & x_3 & x_3^2 & y_3
\end{vmatrix}. \quad (1.105)$$

Похибка 1-го порядку приросту детермінанта згідно (1.101), (1.104), (1.105):

$$B_1 \det 1 = \sum_{l=1}^4 D'_{4,l} =
\begin{vmatrix}
\Delta y_0 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \bar{x}_0^3 \\
\Delta y_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\
\Delta y_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \\
\Delta y_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_3^3
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
y_0 & \bar{x}_0\delta_0 & \bar{x}_0^2 & \bar{x}_0^3 \\
y_1 & \bar{x}_1\delta_1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\
y_2 & \bar{x}_2\delta_2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \\
y_3 & \bar{x}_3\delta_3 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_3^3
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
y_0 & \bar{x}_0 & 2\bar{x}_0^2\delta_0 & \bar{x}_0^3 \\
y_1 & \bar{x}_1 & 2\bar{x}_1^2\delta_1 & \bar{x}_1^3 \\
y_2 & \bar{x}_2 & 2\bar{x}_2^2\delta_2 & \bar{x}_2^3 \\
y_3 & \bar{x}_3 & 2\bar{x}_3^2\delta_3 & \bar{x}_3^3
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
y_0\bar{x} & \bar{x}_0^2 & 3\bar{x}_0^3\delta_0 \\
y_1\bar{x} & \bar{x}_1^2 & 3\bar{x}_1^3\delta_1 \\
y_2\bar{x} & \bar{x}_2^2 & 3\bar{x}_2^3\delta_2 \\
y_3\bar{x} & \bar{x}_3^2 & 3\bar{x}_3^3\delta_3
\end{vmatrix}, \quad (1.106)$$

або

$$B_1 \det 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} A_{ij}. \quad (1.107)$$

Загальне число доданків у виразі (1.107) дорівнює 16. Відносна похибка в першому наближенні $\det 1$

$$\delta \det 1 = \frac{B_1 \det 1}{B_0 \det 1}, \quad (1.108)$$

причому

$$B_0 \det 1 = \begin{vmatrix} \bar{y}_0 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \bar{x}_0^3 \\ \bar{y}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\ \bar{y}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \\ \bar{y}_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_3^3 \end{vmatrix}. \quad (1.109)$$

Користуючись формулами (1.97), (1.107), (1.108), (1.109), отримаємо вираз похибки коефіцієнта a_0 .

Користуючись програмною реалізацією, можна отримати шукані a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , а також їхні похибки в залежності від похибок δ_0 , δ_1 , δ_2 , δ_3 , Δy_0 , Δy_1 , Δy_2 , Δy_3 в аналітичному вигляді. Надавши цим похибкам, а також іншим величинам кількісні значення, отримаємо кількісні значення a_0 , a_1 , a_2 , a_3 .

Становить великий інтерес пошук оптимальних співвідношень між порядком апроксимуючого полінома та похибками отримання координат вузлових точок за критерієм мінімуму похибки апроксимації.

2. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ В СИМВОЛЬ-НОМУ ВИГЛЯДІ

Як відомо, визначник матриці n -го порядку дорівнює сумі добутоків елементів матриці в різних неповторюваних поєднаннях.

Число елементів в кожному добутку дорівнює порядку визначника, а число доданків в сумі дорівнює $n!$. Число визначників усіх порядків природень, як було показано вище, під час аналізу похибок, дорівнює 2^n .

Таким чином, за повного аналізу структурних схем пристроїв у загальному вигляді число членів, що містять n елементів, дорівнює $M = 2^n \cdot n!$, що становить для визначників високих порядків величезну цифру. Наприклад, для $n = 10$, $M = 2^{10} \times 10! = 3,71589 \times 10^9$, а число символів, що підлягає кодуванню в n разів більше. Якщо використовувати, як це прийнято, для кодування символу 1 байт, то необхідна пам'ять перевершує $3,7 \times 10^{10}$ байтів. Очевидно, завдання обчислення визначників в аналітичному вигляді складає великі труднощі.

Водночас, матриці, що описують структурні схеми реальних пристроїв, сильно розріджені нулями, тож число ненульових елементів в рядку рідко перевершує два-три елементи. Завдяки цьому число ненульових елементів суми розкритого визначника різко скорочується. Для точного визначення необхідного ресурсу пам'яті, користуючись висновками алгебри Грассмана [8], можна знайти кількість ненульових членів. Доцільно використовувати алгебру Грассмана також для обчислень розріджених нулями визначників в аналітичному вигляді.

2.1. Знаходження визначників з використанням алгебри Грассмана

За допомогою сучасної термінології, алгебрі Грассмана можна надати наступне визначення: це асоціативна алгебра над полем дійсних чисел, породжена системою елементів l_1, l_2, \dots, l_n , що називаються одиницями Грассмана, і яка визначається умовами:

$$l_k \cdot l_s = -l_s \cdot l_k. \quad (2.1)$$

Звідси випливає

$$\text{при } k = s \quad l_s \cdot l_s = 0 \quad (2.2)$$

Числа Грассмана – це лінійні комбінації породжуючих елементів l_1, l_2, \dots, l_n , тобто лінійні форми:

$$x_i = a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{in}l_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}l_j, \quad (2.3)$$

де a_{ij} , – дійсні числа ($a_{ij} \in R$).

Безліч лінійних форм $\{x_k\}$ утворює лінійний простір.

Добуток лінійних форм підпорядковується умові

$$x_k \cdot x_s = -x_s \cdot x_k, \quad (2.4)$$

з якого витікає:

$$\text{при } k = s \quad x_s \cdot x_s = -x_s \cdot x_s, \text{ тобто } x_s \cdot x_s = 0$$

Іншими словами, добуток чисел Грассмана антикомутативний, а добуток, що містить хоча б два однакових співмножника, дорівнює нулю.

Розглянемо квадратну матрицю A порядку $n \times n$, елементами якої є дійсні числа a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|_1^n.$$

Запишемо лінійні форми, що відповідають кожному рядку матриці:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = a_{i1} l_1 + a_{i2} l_2 + a_{ij} l_j + a_{in} l_n; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Перемножимо всі лінійні форми $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$. Отримаємо n^n доданків. Частина доданків повернеться до нуля, оскільки в них увійдуть співмножниками однакові одиниці Грассмана. Можуть бути відмінні від нуля лише ті доданки, які містять тільки різні одиниці $l_1 l_2 \dots l_n$.

Враховуючи властивість антикомутативності, добутку одиниць Грассмана завжди можна надати вигляду

$$\pm l_1 l_2 \dots l_n.$$

Після зведення подібних членів остаточно матимемо

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \pm D l_1 l_2 \dots l_n.$$

Число D називається *визначником матриці* A і позначається так:

$$D = \text{Det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \|a_{ij}\|_1^n.$$

Наприклад, для обчислення

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

перемножують лінійні форми, що відповідають рядкам визначника:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}l_1 + a_{12}l_2; \\ x_2 &= a_{21}l_1 + a_{22}l_2, \end{aligned}$$

звідки отримують

$$x_1 \cdot x_2 = a_{11}a_{21}l_1l_1 + a_{11}a_{22}l_1l_2 + a_{12}a_{22}l_2l_1 + a_{12}a_{21}l_2l_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})l_1l_2.$$

Значення виразу $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ є шуканим визначником.

Для визначення кількості ненульових членів достатньо використовувати тільки властивість $l_s l_s = 0$. Тому для спрощення доцільно покласти всі ненульові елементи перетвореного визначника рівними одиниці. Тоді спрощені лінійні форми будуть

$$\{x_i\} = \sum_{j=1}^n l_j, \quad (2.5)$$

а число ненульових членів у сумі розкритого визначника буде дорівнювати числу членів у добутку $\prod_{j=1}^n \{x_i\}$, за вирахуванням членів, у які входить хоча б один добуток виду $l_s l_s$.

Застосування алгебри Грассмана проілюструємо на прикладі пристрою (рис. 1.9), що описується матричним рівнянням (1.14)

$$\det 6 = \begin{vmatrix} i & j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 \\ 6 & 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Спрощена лінійна форма визначника:

$$\begin{aligned} x_1 &= (l_1 + l_6); & x_2 &= (l_1 + l_2); & x_3 &= (l_2 + l_3); \\ x_4 &= (l_1 + l_3 + l_4); & x_5 &= (l_4 + l_5); & x_6 &= (l_2 + l_5). \end{aligned}$$

Добуток спрощених лінійних форм

$$\prod_{i=1}^6 \{x_i\} = (l_1 + l_6)(l_1 + l_2)(l_2 + l_3)(l_1 + l_3 + l_4) \cdot (l_4 + l_3)(l_2 + l_5) = \\ = l_6 l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 + l_6 l_1 l_3 l_4 l_5 l_2 + l_6 l_2 l_3 l_1 l_4 l_5.$$

У підсумку, отримано три ненульових члена. Запис спроститься, якщо у виразі використовувати тільки індекси одиниць Грассмана, вважаючи їх символами.

Тоді

$$\prod_{i=1}^6 x_i = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5.$$

Для побудови алгоритму перетворення визначника необхідне точне позиціонування кожного елемента, тобто двома індексами, що відповідають координатами клітки матриці.

Присвоїмо елементу a_{ij} символ i/j , де i – номер рядка, j – номер стовпця.

Уведемо поняття дробово-символьного запису визначника – запис, отриманий як добуток лінійних форм, де кожен елемент позначений як дріб, у чисельнику якого стоїть номер рядка, а в знаменнику – номер стовпця, де розташований даний елемент. Тоді для визначника (2.6) отримаємо дрібно-символьний вираз детермінанта, який позначимо

$$DS \det 6 = \prod_{i=1}^6 \{x_i\} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{3}\right) \times \left(\frac{4}{1} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{5}\right).$$

Проведемо символні перетворення $DS \det 6$ з урахуванням того, що добуток однакових символів у знаменнику перетворює відповідний доданок в нуль, незалежно від символу в чисельнику, який, як зазначено, позначає номер рядка:

$$DS \det 6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{1}.$$

Як бачимо, після перемноження виходить сума добутоків дробово-символьних позначень елементів так, що в чисельнику кожного добутку стоять номери рядків, у знаменнику – стовпців. Зручно, коли в кожному доданку номери рядків розташовані по порядку.

Дробово-символьний запис дозволяє побудувати найбільш короткий алгоритм обчислення визначника.

Уведемо поняття символного зображення визначника $S \det$. Символьне зображення визначника в кожному рядку містить на місці ненульових елементів цифри, рівні номеру стовпця, де розташований даний ненульовий елемент. Перехід від оригінального зображення визначника до символного позначимо знаком $\overset{\bullet}{\longleftrightarrow}$, наприклад,

$$\det 6 \overset{\bullet}{\longleftarrow} S \det 6, \quad (2.7)$$

від символного до оригінального знаком $\overset{\bullet}{\longleftarrow}$, наприклад

$$S \det 6 \overset{\bullet}{\longleftarrow} \det 6.$$

Для прикладу наведемо символне зображення визначника $\det 6$, на якому зображені також траєкторії відбору елементів:

$S \det 6 =$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3		2	3			
4	1		3	4		
5				4	5	
6		2			5	

(2.8)

Для обчислення доданків розкритого визначника складаються добутки символних дробів так, що в чисельнику розташовуються в упорядкованому вигляді $(1, 2, 3, \dots, n)$ номери рядків визначника, а в знаменнику номери стовпців, з яких взято ненульовий елемент цього рядка. Відбір елементів йде послідовно з кожного рядка визначника. При цьому в знаменнику не повинно бути повторюваних номерів стовпців визначника, а порядок їхнього розташування виходить довільний, але загальне число номерів дорівнює числу стовпців, тобто порядку визначника. Оскільки відбір елементів відбувається з кліток матриці, зображеної на площині, можна говорити про траєкторії послідовності відбору.

За неможливості закінчити почату послідовність розташування чисел в знаменнику через неминучість появи повторюваного номера стовпця або відсутності ненульових елементів шукається інша траєкторія з неповторюваних номерів стовпців починаючи з рядка, що передує тому, в якому повторився номер стовпця.

Такий перебір відбувається до досягнення всіх можливих перестановок в знаменнику.

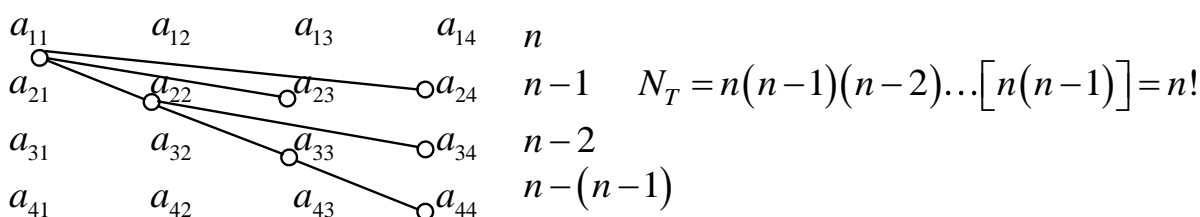
Зауважимо, що дробово-символьний запис вказує на коефіцієнт передачі у відповідних вузлах схеми, тобто

$$\frac{i}{j} \rightarrow \frac{x_i}{x_j} = a_{ij}.$$

За такого підходу стає зрозумілим, чому число доданків розкритого визначника з усіма ненульовими елементами дорівнює $n!$.

Дійсно, з першого рядка може починатися n траєкторій, але через другий рядок можуть пройти від кожного елемента тільки $n-1$ траєкторія, оскільки один елемент першого рядка вже задіяний, через третій рядок від одного елемента першого рядка вже може пройти $n-2$ траєкторій, бо вже будуть задіяні один елемент першого рядка та той елемент другого рядка, що не повторився. Від цього ж елемента першого рядка можуть пройти через четвертий рядок $n-3$ траєкторій і так далі. Тому загальне число траєкторій дорівнює $n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 = n!$

Ілюстрація траєкторій:



Визначник дорівнює, як бачимо, сумі $n!$ членів, що представляють собою добутки елементів визначника по одному з кожного рядка та кожного стовпця, тобто

$$D = \sum_{k=1}^n (-1)^{p_k} \prod_{i,j=1}^n a_{ij},$$

причому в кожному добутку i приймає значення $1, 2, 3, \dots, n$, а j також приймає значення від 1 до n , але порядок розташування значень j в кожному добутку повинен бути неповторюваний. Число ненульових доданків дорівнює числу завершених неповторюваних траєкторій знаменників. Знак перед кожним добутком визначається як $\text{sign}(-1)^{p_k}$, де p_k – число безпорядків в знаменнику k -го доданка за дробово-символьного запису доданків.

Безпорядок – це подія, за якої в невпорядкованій числовій послідовності старша цифра стоїть перед молодшою. Кількість безпорядків p_k – це число старших цифр, розташованих перед молодшими в деякій невпорядкованій числовій послідовності. Наприклад, для послідовностей:

- 3 2 1 4 5 $p = 3$, оскільки перед 1 стоять 2 і 3, а перед 2 стоїть 3;
- 1 3 2 4 5 $p = 1$, оскільки перед 2 стоїть 3;
- 1 2 3 4 5 $p = 0$, оскільки перед молодшими цифрами не стоять старші цифри;
- 5 4 3 2 1 $p = 10$, оскільки перед 1 стоять 2, 3, 4, 5, перед 2 стоять 3, 4, 5, перед 3 стоять 4, 5, перед 4 стоїть 5.

Число безпорядків дорівнює також мінімальному числу перестановок, які необхідно виконати, щоб досягти заданої впорядкованості.

Під час відбору елементів, починаючи з довільної рядка, знак перед кожним доданком визначається за числом перестановок в знаменнику, необхідних для його упорядкування до виду чисельника. При цьому шляхи перестановок можуть бути довільними. Неоптимальний шлях завжди більше на $2 \cdot k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) мінімального і не змінює парності або непарності мінімальної кількості перестановок.

У загальному випадку число безпорядків визначається із системи нерівностей, представлених в табл. 2.1, де прийняті такі позначення: j – цифра в знаменнику (збігається з номером стовпця); j_i – цифра в знаменнику, взята з i -го рядка (наприклад, 4_3 цифра четвертого стовпця третього рядка); j_n – остання цифра в знаменнику, тобто взята з останнього рядка (при нормальній впорядкованості чисельника); n – число рядків; $i < n$.

Таблиця 2.1

$< n - 1 \rightarrow 1$				
$j_n > j_{n-1} \rightarrow 0$			\vdots	
$< j_{n-2} \rightarrow 1$	$< j_{n-2} \rightarrow 0$		\vdots	
$j_n > j_{n-2} \rightarrow 0$	$j_{n-1} < j_{n-2} \rightarrow 0$		\vdots	
$< j_{n-3} \rightarrow 1$	$< j_{n-3} \rightarrow 1$	$< j_{n-3} \rightarrow 1$	\vdots	
$j_n > j_{n-3} \rightarrow 0$	$j_{n-1} < j_{n-3} \rightarrow 0$	$j_{n-2} > j_{n-3} \rightarrow 0$	\vdots	
...
$< j_2 \rightarrow 1$	$< j_2 \rightarrow 1$	$< j_2 \rightarrow 1$	\vdots	
$j_n > j_2 \rightarrow 0$	$j_{n-1} > j_2 \rightarrow 0$	$j_{n-2} > j_2 \rightarrow 0$	\vdots	
$< j_1 \rightarrow 1$	$< j_1 \rightarrow 1$	$< j_1 \rightarrow 1$	\vdots	$< j_1 \rightarrow 1$
$j_n > j_1 \rightarrow 0$	$j_{n-1} > j_1 \rightarrow 0$	$j_{n-2} > j_1 \rightarrow 0$	\vdots	$j_2 > j_1 \rightarrow 0$
		$i < n - 2$	\vdots	
$i = n \quad i < n$	$i = n - 1 \quad i < n - 1$	$i = n - 2 \quad i < n - 2$	\vdots	$i = 2 \quad i < 2$

Якщо взяти цифру з рядка $e - j_i$ і порівняти її з цифрою з рядка $i - j_i$, причому $i < l$, і результат порівняння, відповідний «менше», позначити одиницею ($C = 1$), а результат порівняння, відповідний «більше», позначити нулем ($C = 0$), тобто якщо $j_l < j_i$, то

$$C_{(j_l < j_i)} |_{i < l} = 1, \quad (2.9)$$

якщо $j_l > j_i$, то

$$C_{(j_l > j_i)} |_{i < l} = 0, \quad (2.10)$$

отримаємо систему нерівностей, подану в табл. 2.1.

Загальна кількість порівнянь для визначення кількості безпорядків кожного доданка визначника n -го порядку дорівнює сумі членів арифметичної прогресії, в якій

$$a_1 = 1, \quad d = 1, \quad a_k = n - 1, \quad k = n - 1.$$

Тоді

$$S_n = kd \frac{a_1 + a_k}{2} = (n - 1) \frac{n}{2}. \quad (2.11)$$

Для визначника п'ятого порядку $S_n = 10$.

З таблиці. 2.1, з огляду на умови (2.9) і (2.10), можна записати

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} C(j_n \lesseqgtr j_i) + \sum_{i=1}^{n-2} C(j_{n-1} \lesseqgtr j_i) + \sum_{i=1}^{n-3} C(j_{n-2} \lesseqgtr j_i) + \dots + C(j_2 \lesseqgtr j_1). \quad (2.12)$$

Число сум у виразі (2.20) дорівнює $n - 1$, верхня межа кожної суми на одиницю менше, ніж у попередній сумі, тому в загальному вигляді (2.12) можна записати так:

$$p = \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{i=1}^q C(j_{q+1} \lesseqgtr j_i). \quad (2.13)$$

Для прикладу обчислимо визначник $S \det 6$ (2.6). На визначнику (2.6) зображені можливі траєкторії відбору елементів і складено дробово-символьний запис:

$$S \det 6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^{p_1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{2} (-1)^{p_2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^{p_3}. \quad (2.14)$$

На основі системи нерівностей (2.9, 2.10) за формулою (2.13) обчислено число безпорядків p_1 :

$q=1$	$i=1$	$j_2=1$	$j_1=6$	$C(1<6)=1$
$q=2$	$i=1$	$j_3=2$	$j_1=6$	$C(2<6)=1$
$q=2$	$i=2$	$j_3=2$	$j_2=1$	$C(2>1)=0$
$q=3$	$i=1$	$j_4=3$	$j_1=6$	$C(3<6)=1$
$q=3$	$i=2$	$j_4=3$	$j_2=1$	$C(3>1)=0$
$q=3$	$i=3$	$j_4=3$	$j_3=2$	$C(3>2)=0$
$q=4$	$i=1$	$j_5=4$	$j_1=6$	$C(4<6)=1$
$q=4$	$i=2$	$j_5=4$	$j_2=1$	$C(4>1)=0$
$q=4$	$i=3$	$j_5=4$	$j_3=2$	$C(4>2)=0$
$q=4$	$i=4$	$j_5=4$	$j_4=3$	$C(4>3)=0$
$q=5$	$i=1$	$j_6=5$	$j_1=6$	$C(5<6)=1$
$q=5$	$i=2$	$j_6=5$	$j_2=1$	$C(5>1)=0$
$q=5$	$i=3$	$j_6=5$	$j_3=2$	$C(5>2)=0$
$q=5$	$i=4$	$j_6=5$	$j_4=3$	$C(5>3)=0$
$q=5$	$i=5$	$j_6=5$	$j_5=4$	$C(5>4)=0$

$$p_1 = \sum C.$$

Аналогічно знаходимо: $p_2 = 8$, $p_3 = 7$.

Остаточню одержимо

$$S \det 6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^5 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{2} (-1)^8 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} (-1)^7 =$$

$$= -a_{16} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{54} \cdot a_{65} + a_{16} a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55} \cdot a_{62} - a_{16} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \cdot a_{54} \cdot a_{65}.$$

Таким чином, з урахуванням алгебри Грассмана, алгоритм містить на-самперед процедуру визначення кількості ненульових членів і потім процедуру символного обчислення визначників з урахуванням знаків перед доданком шляхом рахунку числа безпорядків в знаменнику.

2.2. Похідні визначників. Розкладання визначників у ряд

Якщо елементи квадратної матриці вважати деякими змінними, то її визначник є функцією багатьох змінних

$$D = D(a_{ij}). \quad (2.15)$$

Змінні a_{ij} можуть бути як незалежними, так і функціонально пов'язаними, тобто

$$a_{pq} = \varphi(a_{ij}). \quad (2.16)$$

Наприклад, у визначнику Вандермонда елементи одного рядка пов'язані ступеневою залежністю

$$a_{ij} = (a_i)^j \mid_{j=0, \dots, (n-1)}. \quad (2.17)$$

Поняття похідної визначника не тільки важливе саме по собі, але й необхідне при вирішенні задач оптимізації, для знаходження вихідного опору складних активних електричних кіл тощо.

Наприклад, вихідний опір активного двополюсника

$$-z_{вих} = \frac{\partial U_{вих}}{\partial J_{вих}} \quad (2.18)$$

і знаходиться тільки при зміні навантаження, тобто

$$-z_{вих} = \frac{\frac{\partial U_{вих}}{\partial z_n}}{\frac{\partial J_{вих}}{\partial z_n}}, \quad (2.19)$$

де z_n – опір навантаження. Знак мінус обумовлений тут тим, що при збільшенні z_n струм зменшується.

Розглянемо похідну визначника з незалежними елементами

$$a_{pq} \neq \varphi(a_{ij}). \quad (2.20)$$

Представляючи визначник як суму добутків мінорів певного стовпця (рядка) на відповідні алгебраїчні доповнення та з огляду на те, що алгебраїчне доповнення не містить даного елемента, отримаємо похідну добутку $a_{ij}A_{ij}$:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \quad (2.21)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення, знак якого дорівнює $(-1)^{i+j}$.

Розглянемо похідну визначника з функціонально пов'язаними елементами. Нехай всі елементи визначника в загальному випадку функціонально пов'язані і є функцією незалежної змінної x , тобто.

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(x). \quad (2.22)$$

Безпосереднє диференціювання досить громіздке, оскільки воно зводиться до диференціювання добутку кількох функцій. Тому для знаходження часткової похідної визначника за певною змінною скористаємося поняттям похідної

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{\Delta x}, \quad (2.23)$$

де ΔD – прирощення визначника, викликане прирощенням змінної x .

Як було показано вище (див. (1.38)), прирощення визначника, викликане прирощенням його елементів, дорівнює сумі членів k -го порядку прирощень ($k=1, \dots, n$):

$$\Delta D = \sum_{k=1}^n B_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k, \quad (2.24)$$

$$B_k = \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k \text{ – член } k\text{-го порядку прирощення.} \quad (2.25)$$

Тут $D_{n,l}^k$ – l -й визначник n -го порядку k -го порядку прирощень; D_n^k – визначник n -го порядку, в якому k стовпців замінені прирощеннями відповідних елементів, рівних номінальним (початковим) значенням відповідних елементів; C_n^k – число поєднань з n до k .

Нагадаємо, що член першого порядку прирощень

$$B_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} A_{ij}. \quad (2.26)$$

Якщо у визначнику D елемент $a_{ij} = \varphi_{ij}(x)$, то прирощення Δa_{ij} можна знайти, скориставшись поданням функції рядом Тейлора

$$\Delta a_{ij} = \Delta \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(x_0) = \sum_{c=1}^{\infty} (1/c!) \varphi_{ij}^{(c)}(x_0) \cdot (\Delta x)^c, \quad (2.27)$$

де x_0 – номінальне (початкове) значення змінної x , в межах якого функція розкладається в ряд Тейлора; $\varphi_{ij}^{(c)}(x_0)$ – похідна порядку c функції $\varphi_{ij}(x)$ в точці x_0 .

Подальший виклад будемо ілюструвати визначником третього порядку, в якому всі елементи залежні, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \varphi_{13}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \varphi_{23}(x) \\ \varphi_{31}(x) & \varphi_{32}(x) & \varphi_{33}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.28)$$

Матриця прирощень визначника:

$$\begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

Елементи $\Delta\varphi_{ij}$ знаходяться за формулою (2.27).

Визначник (2.28):

$$D = B_0 + B_1 + B_2 + B_3, \quad (2.30)$$

де

$$B_0 = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \varphi_{12}(x_0) & \varphi_{13}(x_0) \\ \varphi_{21}(x_0) & \varphi_{22}(x_0) & \varphi_{23}(x_0) \\ \varphi_{31}(x_0) & \varphi_{32}(x_0) & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix}; \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & \begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \varphi_{12}(x_0) & \varphi_{13}(x_0) \\ \Delta\varphi_{21} & \varphi_{22}(x_0) & \varphi_{23}(x_0) \\ \Delta\varphi_{31} & \varphi_{32}(x_0) & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \Delta\varphi_{12} & \varphi_{13}(x_0) \\ \varphi_{21}(x_0) & \Delta\varphi_{22} & \varphi_{23}(x_0) \\ \varphi_{31}(x_0) & \Delta\varphi_{32} & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \varphi_{12}(x_0) & \Delta\varphi_{13} \\ \varphi_{21}(x_0) & \varphi_{22}(x_0) & \Delta\varphi_{23} \\ \varphi_{31}(x_0) & \varphi_{32}(x_0) & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Узагальнений вираз для B_1 на основі (2.32):

$$B_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_{ij} A_{ij}. \quad (2.33)$$

Член другого порядку прирощень для визначника (2.28):

$$\begin{aligned} B_2 = & \begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \varphi_{13}(x_0) \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \varphi_{23}(x_0) \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \varphi_{33}(x_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta\varphi_{11} & \varphi_{12}(x_0) & \Delta\varphi_{13} \\ \Delta\varphi_{21} & \varphi_{22}(x_0) & \Delta\varphi_{23} \\ \Delta\varphi_{31} & \varphi_{32}(x_0) & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} \\ \varphi_{21}(x_0) & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} \\ \varphi_{31}(x_0) & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

У загальному вигляді вираз (2.34) може бути представлено як сума добутків двох різних прирощень і відповідних алгебраїчних доповнень другого порядку. Число доданків в сумі $n(n-1) \cdot C_n^2$, тобто

$$B_2 = \sum_{l=1}^{n(n-1)C_n^2} \Delta\varphi_{ij} \Delta\varphi_{pq} \bar{A}_{ij,pq}, \quad (2.35)$$

де $\bar{A}_{ij,pq}$ – алгебраїчне доповнення другого порядку, що складається з мінімальних значень елементів.

Член третього порядку прирощень у визначнику (2.36) дорівнює матриці прирощень.

У загальному випадку член k -го порядку прирощень складається із суми добутків k прирощень на алгебраїчне доповнення k -го порядку. Алгебраїчне доповнення k -го порядку – це визначник, який утворюється з вихідного визначника послідовним викреслюванням k стовпців і до рядків, в яких розташовані k елементів.

Число доданків в сумі

$$n(n-1) \dots (n+1-k) C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} C_n^k. \quad (2.36)$$

Вираз для B_k має вигляд

$$B_k = \sum_{l=1}^{\frac{n!}{(n-k)!} C_n^k} \bar{A}_n^k \prod \Delta\varphi_{i,j}, \quad (2.37)$$

де \bar{A}_n^k – алгебраїчне доповнення k -го порядку прирощень визначника n -го порядку.

Враховуючи те, що межа суми дорівнює сумі меж з (2.23) і (2.24), отримаємо

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^4 B_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_2}{\Delta x} + \dots \quad (2.38)$$

Знайдемо границі для доданків при $k=1, 2, \dots, n$. Оскільки границя добутку функції на сталу дорівнює добутку границі функції на цю сталу, із (2.33) і (2.27) отримаємо границю

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_1}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_{ij} \bar{A}_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c!} \varphi_{ij}^{(c)}(x_0) (\Delta x)^c \right] \bar{A}_{ij}}{\Delta x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi'_{ij}(x_0) \bar{A}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Залежність (2.39) може бути отримана і простіше, якщо врахувати, що за визначенням

$$\varphi'_{ij}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_{ij}}{\Delta x}, \quad (2.40)$$

члени другого і вищих порядків прирощень, як випливає з (2.35) і (2.37), містять добутки прирощень, тому з урахуванням (2.27) при $k \geq 2$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_k}{\Delta x} \Big|_{k \geq 2} = 0, \quad (2.41)$$

оскільки при $m \geq 2$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^m}{\Delta x} = 0. \quad (2.42)$$

Таким чином, похідна визначника, що містить функціонально пов'язані елементи, дорівнює сумі добутків похідних функціонально пов'язаних елементів на їхні алгебраїчні доповнення

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi'_{ij}(x_0) \bar{A}_{ij}, \quad (2.43)$$

де \bar{A}_{ij} – номінальне значення алгебраїчного доповнення.

Звісно, доданки, що містять незалежні елементи, дорівнюють нулю, оскільки дорівнюють нулю похідні від незалежних величин.

З (2.43) видно, що похідна порядку m при залежних елементах дорівнює

$$\frac{\partial^m D}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ij}^m(x_0) \bar{A}_{ij}. \quad (2.44)$$

Т-розкладання визначників. Якщо елементи квадратної матриці вважати деякими змінними, то її визначник є функцією багатьох змінних і може бути представлений рядом Тейлора в межах певних початкових значень змінних a_{ij} .

Як відомо, подання функції багатьох змінних рядом Тейлора в загальному випадку передбачає отримання часткових похідних першого і більш високих порядків вихідної функції, а також змішаних похідних різних порядків.

Оскільки розкритий визначник при незалежних елементах є лінійною комбінацією своїх елементів, то в наборі похідних будуть відсутні похідні по одній змінній вище першого порядку й будуть присутніми похідні першого порядку та змішані похідні вищих порядків. Максимальний порядок похідних дорівнює порядку визначника.

Вище було отримано розкладання визначника на суму визначників k -го порядку прирощень ($k=0, \dots, n$). Назвемо це розкладання Т-розкладанням визначника. З порівняння Т-розкладання з розкладанням визначника як функції багатьох змінних в ряд Тейлора можна зробити висновки, що форми розкладань збігатимуться, а саме: визначник нульового порядку прирощень $k=0$ є початковим значенням функції. Наступні члени є добутками прирощень змінних на постійні коефіцієнти. У розкладанні Тейлора ці коефіцієнти є частковими похідними, діленими на $k!$, де k – порядок похідної, і мають вигляд

$$\frac{1}{1!} \frac{\partial F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij}}; \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}}; \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij} \partial a_{kl} \partial a_{pq}} \dots; \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(\bar{a}_{ij})}{\partial a_{ij} \dots \partial a_{mn}}.$$

У Т-розкладанні коефіцієнти є алгебраїчним доповненням k -го порядку ($k=0, \dots, n$).

Під алгебраїчним доповненням k -го порядку будемо розуміти визначник, який залишається після послідовного викреслювання рядків і стовпців з елементами визначника у вигляді прирощень, які входять у добуток, утворюючи елемент k -го порядку прирощень.

Прирівнюючи коефіцієнти ряду Тейлора та Т-розкладання, приходимо до висновку, що похідна k -го порядку визначника як функція своїх елементів дорівнює алгебраїчному доповненню k -го порядку, помноженому на $k!$.

Якщо елементи визначника функціонально пов'язані, то в розкладанні будуть також похідні вищих порядків за даною змінною, коли існують вищі похідні даного елемента. Для знаходження вищих похідних однієї змінної та знаходження змішаних похідних необхідно користуватися формулою (2.44).

Визначник комплексної матриці. Матриця \dot{C} , елементи якої є комплексними величинами

$$c_{ij} = a_{ij} + jb_{ij},$$

є сумою двох матриць – матриці A , елементами якої є дійсні частини елементів матриці \dot{C} , тобто a_{ij} , і матриці \dot{B} , елементами якої є уявні частини елементів матриці \dot{C} , тобто jb_{ij} :

$$\dot{C} = A(a_{ij}) + \dot{B}(jb_{ij}).$$

Використовуючи теорему про визначник суми двох матриць в термінах, прийнятих в Т-розкладанні визначника, отримуємо

$$\dot{D}_{\dot{C}} = \sum_{k=0}^n (j)^k \sum_{l=1}^n D_{n,l}^k, \quad k \leq n.$$

Уведемо поняття визначника k -го порядку уявності \dot{D}_n^k – визначник, в якому елементи k стовпців є уявними частинами елементів матриці \dot{C} , тобто jb_{ij} , а $n - k$ стовпців дійсними частинами елементів стовпців матриці \dot{C} , тобто a_{ij} .

Використовуючи властивість загального множника елементів стовпця (рядка) можна записати

$$\dot{D}_k^n = (j)^k D_n^k,$$

де \dot{D}_k^n – визначник, що містить k стовпців елементів b_{ij} і $n - k$ стовпців елементів a_{ij} .

Враховуючи властивість ступенів числа j , отримаємо

$$\dot{D}_{\dot{C}} = \text{Re}(\dot{D}_{\dot{C}}) + j\text{Im}(\dot{D}_{\dot{C}}),$$

де

$$\begin{aligned} \text{Re}(\dot{D}_{\dot{C}}) &= \sum_{k=0,4,8\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k - \sum_{k=2,6,10\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k ; \\ \text{Im}(\dot{D}_{\dot{C}}) &= \sum_{k=1,5,9\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k - \sum_{k=3,7,11\dots}^n \sum_{l=1}^{C_n^k} D_{n,l}^k . \end{aligned}$$

3. ВИЗНАЧНИКИ ТА АВТОМАТИЗОВАНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Завданням розрахунку електричних кіл є визначення струмів у гілках і потенціалів у вузлах при заданих опорах гілок.

Для аналізу роботи кола, оптимізації режимів, визначення чутливості до зміни окремих гілок і джерел необхідно використовувати аналітичні співвідношення, що визначають стан кола в загальному вигляді.

Електричні кола повністю описуються законом Ома і першим і другим законами Кірхгофа, на основі яких складаються системи рівнянь стану кола.

У зв'язку з тим, що точність обчислень під час вирішення системи рівнянь високих порядків була незадовільною через нагромадження похибок, теоретичні основи електротехніки розвивалися шляхом скорочення числа рівнянь, пошуку найбільш короткого шляху визначення стану даної ділянки кола. На цьому етапі були запропоновані методи перетворення кіл із зменшенням числа вузлів і контурів (наприклад, перетворення зірки в трикутник і трикутника в зірку). Використовувалися принцип накладання, метод холостого ходу і короткого замикання, властивість взаємності, метод вузлових потенціалів для рішення відносно потенціалів необхідних вузлів, метод контурних струмів.

Щоб не було сумніву в правильності рішення, широко використовувалася критерій балансу потужностей.

Згодом велике поширення отримали топологічні методи дослідження кіл, істотно спростили завдання аналізу та синтезу завдяки більшій формалізації всіх процедур.

Для прикладу знайдемо коефіцієнт перетворення операційного підсилювача з послідовним зворотним зв'язком (рис. 3.1).

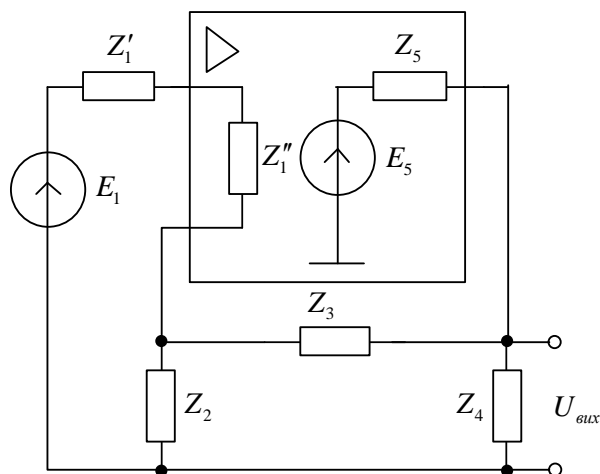


Рисунок 3.1 – Схема підсилювача з послідовним зворотним зв'язком

Врахуємо вхідний і вихідний опір інтегральної схеми, а також джерело сигналу. На схемі підсилувача: Z_1' – внутрішній опір джерела сигналу; Z_1'' – вхідний опір інтегральної схеми; Z_2, Z_3 – опори зворотного зв'язку; Z_4 – опір навантаження; E_5 – е. р. с. на виході інтегральної схеми, $E_5 = I_1 Z_1'' k_u$; I_1 – вхідний струм інтегральної схеми; k_u – коефіцієнт підсилення інтегральної схеми за напругою.

Позначимо $Z_1' + Z_1'' = Z$. Еквівалентна схема подана на рис. 3.2. Тут показані три контури і два вузли, одне незалежне джерело E_1 і одне залежне джерело E_5 , тому відносно струмів гілок схема описується системою з п'яти рівнянь.

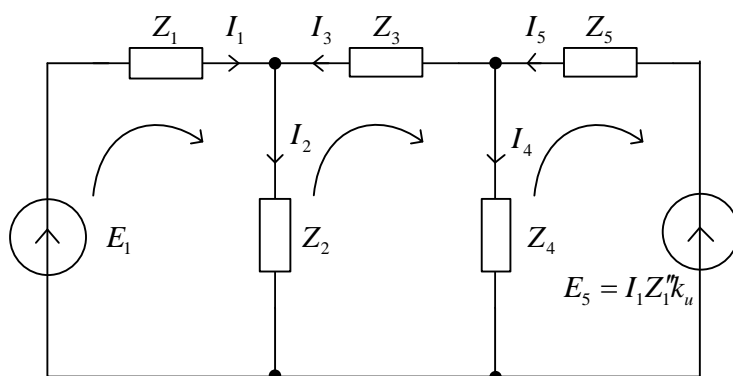


Рисунок 3.2 – Еквівалентна схема підсилувача з послідовним ВЗЗ

Візьмемо в якості позитивного напрямку струмів до вузла, негативно – від вузла, також обхід контурів за годинниковою стрілкою. У разі збігу напрямку струму в гілці і напрямку обходу контуру перед відповідною ділянкою кола ставиться знак «+» в лівій частині рівняння.

У разі збігу напрямку джерела та напрямку обходу ставиться знак «+», якщо джерело записується в праву частину рівняння. Враховуючи прийняті умовності складемо систему рівнянь відносно струмів гілок:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & I_1 Z_1 + I_2 Z_2 = E_1 \\
 2) \quad & I_1 - I_2 + I_3 = 0; \\
 3) \quad & - I_3 - I_4 + I_5 = 0; \\
 4) \quad & - I_2 Z_2 - I_3 Z_3 + I_4 Z_4 = 0; \\
 5) \quad & I_1 Z_1'' k_u - Z_4 Z_4 - I_5 Z_5 = 0.
 \end{aligned}$$

$i \ j$	1	2	3	4	5
1	Z_1	Z_2			
2	1	-1	1		
3			1	1	-1
4		Z_2	Z_3	$-Z_4$	
5	$-Z_1''k$			Z_4	Z_5

$$= \begin{matrix} I_k \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix} = \begin{matrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (3.1)$$

↑
↑
↑

Матриця коефіцієнтів
Матриця стру-
Матриця незалежних е.р.с.

Знайдемо коефіцієнт перетворення вхідної е. р. с. E_1 у вихідну напругу $U_{вих} = I_4 Z_4$

$$k_{41} = \frac{I_4 Z_4}{E_1} \quad (3.2)$$

Струм

$$I_4 = \frac{\det 4}{\det C}, \quad (3.3)$$

де $\det C$ – визначник системи; $\det 4$ – визначник матриці коефіцієнтів, в якому четвертий стовпець замінений матрицею стовпцем правих частин рівняння (3.1). Із (3.2) і (3.3)

$$k_{41} = \frac{\det 4}{\det C} \cdot \frac{Z_4}{E_1}, \quad (3.4)$$

$$k_{41} = \frac{(Z_2 Z_5 + Z_3 Z_1''k + Z_2 Z_1''k) Z_4}{Z_1 Z_4 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_1''} \quad (3.5)$$

Формула (3.4) спроститься, якщо $\det 4$ розкласти відносно елемента $a_{14} = E_1$.

Тоді

$$\det 4 = E_1 (-1)^{1+4} \cdot A_{14}. \quad (3.6)$$

Не порушуючи нумерацію елементів визначника, запишемо

$$\begin{array}{ccccc}
& & 1 & 2 & 3 & 5 \\
1 & & 1 & -1 & 1 & \\
2 & & & & 1 & -1 \\
3 & & & Z_2 & Z_3 & \\
5 & -Z_1^n k & & & & Z_5
\end{array} . \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.6) в (3.4), отримаємо

$$k_{41} = \frac{(-1)^5 \cdot A_{14} \cdot Z_4}{\det C}. \quad (3.8)$$

Відносна похибка k_{41}

$$\begin{aligned}
\delta(k_{41}) &= \frac{\delta(A_{14}Z_4) - \delta(\det C)}{1 + \delta(\det C)} = \\
&= \frac{\delta(A_{14}) + \delta(Z_4) + \delta(A_{14})\delta(Z_4) - \delta(\det C)}{1 + \delta(\det C)}.
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Для знаходження відносних похибок визначників необхідно скласти матриці похибок визначників:

$$\Delta(A_{14}) = \begin{array}{c|ccccc}
i \ j & 1 & 2 & 3 & 5 \\
\hline
1 & & & & \\
2 & & & & \\
3 & & \Delta Z_2 & \Delta Z_3 & \\
5 & -\Delta(Z_1^n k) & & & \Delta Z_5
\end{array} ; \quad (3.10)$$

$$\Delta(\det C) = \begin{array}{ccccc}
& 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & \Delta Z_1 & \Delta Z_2 & & & \\
2 & & & & & \\
3 & & & & & \\
4 & & \Delta Z_2 & \Delta Z_3 & -\Delta Z_4 & \\
5 & \Delta(Z_1^n k) & & & \Delta Z_4 & \Delta Z_5
\end{array} . \quad (3.11)$$

Знайдемо похибки з урахуванням першого порядку малості:

$$\begin{aligned}
B_1(A_{14}) = & \begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & & -1 & 1 & \\ 2 & & & 1 & -1 \\ 3 & & Z_2 & Z_3 & \\ 5 & -\Delta(Z_1''k) & & & Z_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & & 1 & \\ 2 & & & 1 & -1 \\ 3 & & \Delta Z_2 & Z_3 & \\ 5 & -Z_1''k & & & Z_5 \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & & \\ 2 & & & -1 & \\ 3 & & Z_2 & \Delta Z_3 & \\ 5 & -Z_1''k & & & Z_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ 2 & & & 1 & \\ 3 & & Z_2 & Z_3 & \\ 5 & -Z_1''k & & & \Delta Z_5 \end{vmatrix} ; \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1(A_{14}) = & (-1)^{4+1} (-\Delta Z_1''k) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ Z_2 & Z_3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \Delta Z_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -Z_1''k & 0 & Z_5 \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{3+3} \Delta Z_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -Z_1''k & 0 & Z_5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \Delta Z_5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \quad (3.13) \\
& = \Delta Z_1''k (Z_3 - Z_2) - \Delta Z_2 (Z_5 - Z_1''k) + \Delta Z_3 Z_1''k - \Delta Z_5 Z_2 ;
\end{aligned}$$

$$\delta_1(A_{14}) = \frac{B_1(A_{14})}{\bar{A}_{14}}, \quad (3.14)$$

Абсолютна похибка першого порядку малості визначника системи:

$$\begin{aligned}
B_1(\det C) = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \Delta Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -\Delta(Z_1''k) & & & Z_4 & Z_5 \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & \Delta Z_2 & & & \\ 2 & 1 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & -1 \\ 4 & & \Delta Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1''k & & & Z_4 & Z_5 \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & 1 & -1 & & & \\ 3 & & & 1 & -1 & \\ 4 & & Z_2 & \Delta Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1''k & & & Z_4 & Z_5 \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & Z_1 & Z_2 & & & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -\Delta Z_4 & \\ 5 & -Z_1''k & & & \Delta Z_4 & Z_5 \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & & \\ 3 & & & 1 & 1 & -1 \\ 4 & & Z_2 & Z_3 & -Z_4 & \\ 5 & -Z_1''k & & & Z_4 & \Delta Z_5 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Відносна похибка $\det C$

$$\delta_1(\det C) = \frac{B_1(\det C)}{\det \bar{C}}, \quad (3.16)$$

де $\det \bar{C}$ – номінальне значення визначника системи.

Підставляючи в (3.9) (3.14) і (3.16), отримаємо вираз похибки в першому наближенні.

Для отримання похибки в другому наближенні необхідно знайти члени другого порядку наближень B_2 шляхом заміни у визначниках номінальних значень двох стовпців стовпцями матриці прирощень.

За необхідності врахування похибок більш високих порядків потрібно врахувати члени вищих порядків прирощень. Використавши розроблене програмне забезпечення для вирішення всіх виконаних вище перетворень, треба лише скласти матричний запис системи рівнянь стану кола та ввести його в ЕОМ

Вихідний опір ділянки електричного кола. Вихідний опір ділянки електричного кола дорівнює похідній вихідної напруги по струму навантаження і може бути визначений тільки в разі зміні навантаження, тобто

$$-Z_{вих} = \frac{\partial U_{вих}}{\partial J_{вх}} = \frac{\frac{\partial U_{вих}}{\partial Z_n}}{\frac{\partial J_{вих}}{\partial Z_n}}. \quad (3.17)$$

Знак «-» перед $Z_{вих}$ обумовлений тим, що при збільшенні Z_n струм зменшується.

У простих випадках це очевидні співвідношення, а в більш складних, наприклад в пристроях зі зворотним зв'язком, вихідний опір визначається шляхом перетворення кола або застосуванням формули (3.17).

Зауважимо, що опір електричного кола між певними двома точками є тим же самим опором, незалежно від того, споживає схема енергію, або віддає її. Тому вихідний опір між певними двома точками дорівнює вхідному, якщо дана ділянка кола є приймачем.

Як впливає з формули (3.17), для визначення вихідного опору необхідно знайти похідні напруги та струму гілки з опору даної гілки. Якщо напруга й струм задані в матричній формі, то слід обчислити похідні визначників. Тоді отримаємо вираз для вихідного опору для випадку, коли вихідні напруги й струм є рішеннями матричного рівняння.

За законом Ома

$$U_{вих} = I_{вих} Z_n, \quad (3.18)$$

де Z_n – опір навантаження.

У вигляді матричного запису

$$U_{вих} = \frac{\det I_n}{\det C} Z_n. \quad (3.19)$$

Тут і надалі

$$I_n = I_{вих}.$$

Підставимо в (3.17) величину (3.19):

$$-Z_{вих} = \frac{\frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\det I_n}{\det C} Z_n \right)}{\frac{\partial}{\partial Z_n} \left(\frac{\det I_n}{\det C} \right)}.$$

Після перетворень отримаємо

$$Z_{вих} = \frac{\det I_n \cdot \det C}{\det I_n \cdot \det' C - \det' I_n \cdot \det C} - Z_n. \quad (3.20)$$

Нагадаємо, що

$$\begin{cases} \det' I_n = \frac{\det I_n}{\partial Z_n}; \\ \det' C = \frac{\det C}{\partial Z_n}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Зазвичай, елементи, що містять Z_n , розташовані в стовпці, відповідному I_n , оскільки в рівняннях контурних струмів спад напруги на гілці навантаження дорівнює $I_n \cdot Z_n$.

У цих випадках $\det I_n$ не містить Z_n , отже,

$$\det' I_n = 0.$$

Тому формула (3.20) спрощується

$$Z_{вих} = \frac{\det C}{\det' C} - Z_n. \quad (3.22)$$

Нерідко вираз (3.22) може бути далі спрощено, якщо $\det C$ розкласти за елементами стовпця, що містить Z_n :

$$Z_{вих} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_{in}(Z_{in}) A_{in}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi'_{in}(Z_{nn}) A_{in}} - Z_n \quad (3.23)$$

де $\varphi_{in}(Z_n)$ – елемент, що містить Z_n ; A_{in} – відповідне φ_{in} алгебраїчне доповнення; Z_{nn} – номінальне значення Z_n .

Для забезпечення автоматизованого перетворення формули (3.20) в аналітичному вигляді бажано операції перемноження та диференціювання також подати у вигляді визначників.

У зв'язку з цим нагадаємо, що добутком визначників A , B порядку $m \times m$ та $n \times n$ при $n < m$ є такий визначник порядку $2m \times 2m$, в якому перший квадрант займає визначник A , а третій квадрант займає визначник B , доповнений до порядку $m \times m$ одиницями в головній діагоналі.

Розглянемо, наприклад, добуток визначників четвертого та другого порядків:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Похідна визначника при залежних елементах, як показано в п. 2.2, є сумою алгебраїчних доповнень, помножених на похідні відповідних їм мінорів – елементів визначника, тобто похідна визначника – це сума визначників, порядок яких на одиницю менше, ніж порядок диференційованого визначника, помножених на похідну відповідного елемента:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi'_{ij}(x_0) \bar{A}_{ij}. \quad (3.25)$$

Таким чином, процедура знаходження вихідного опору зводиться до операцій над визначниками, які в свою чергу утворюють нові визначники. Тому визначення вихідного опору також легко піддається автоматизації обчислення в аналітичному вигляді.

Проілюструємо викладене декількома прикладами.

Приклад 1. Знайти вихідний опір кола (рис. 3.3) в точках 0,3.

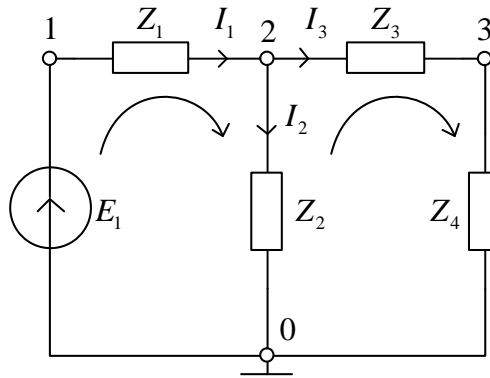


Рисунок 3.3 – Електричне коло з двома контурами

На схемі Z – опір навантаження, $Z_4 = Z_n$, $I_n = I_3$.

Матричне рівняння, що описує схему рис. 3.3:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -Z_2 & Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Враховуючи, що $\det' I_n = 0$, вираз $Z_{вих}$ можна отримати за формулою (3.22)

$$Z_{вих} = \frac{\det C}{\det' C} - Z_n = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.27)$$

Приклад 2. Визначити вихідний опір підсилювача з послідовним зворотним зв'язком і виходом за напругою (рис. 3.4).

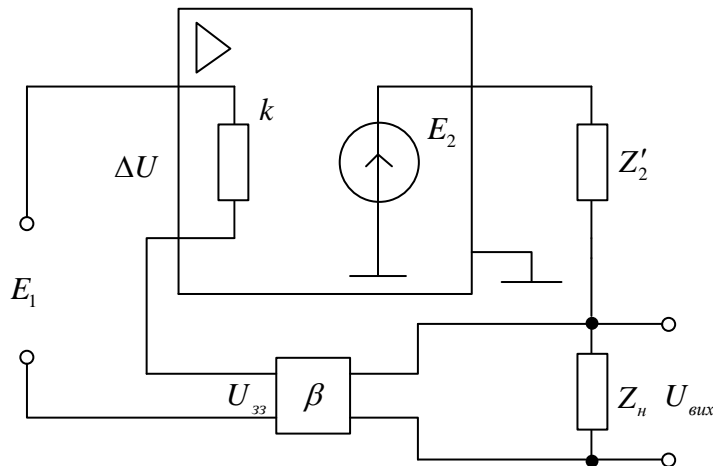


Рисунок 3.4 – Схема підсилювача з виходом за напругою та послідовним зворотним зв'язком

З метою спрощення зробимо припущення, що вихідний опір джерела сигналу E_1 дорівнює нулю, вихідний опір блоку зворотного зв'язку β дорівнює нулю, вхідний опір блоку зворотного зв'язку дорівнює нескінченності.

Еквівалентну схему підсилювача подано на рис. 3.5, де $E_2 = kI_1Z_1$, $U_{зз} = \beta I_n Z_n$.

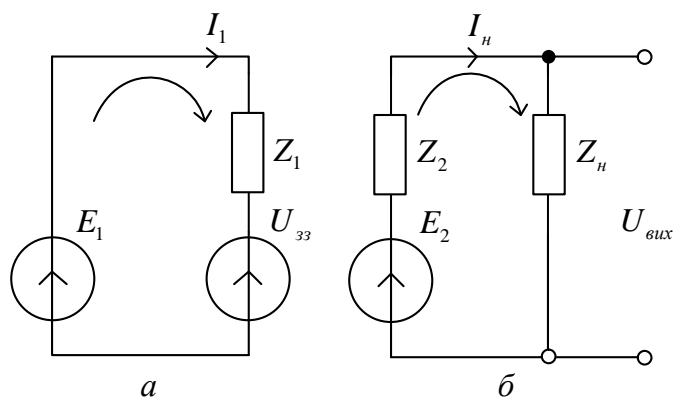


Рисунок 3.5 – Еквівалентна схема підсилювача рис. 3.5

Еквівалентна схема описується наступними матричними рівняннями:

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_n\beta \\ -Z_1K & Z_2 + Z_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (3.28)$$

$$\det I_n = \begin{bmatrix} Z_1 & E_1 \\ -Z_1k & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Як бачимо, $\det I_n$ не залежить від Z_n , тому $\det' I_n = 0$ і вихідний опір слід обчислювати за формулою (3.22).

З (3.28)

$$\det C = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_n\beta \\ -Z_1K & Z_2 + Z_n \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Відповідно до (3.28),

$$\det' C = Z_1 + Z_1k\beta = Z_1(1 + k\beta). \quad (3.31)$$

Підставляючи в (3.22), (3.30) і (3.31), отримаємо

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{вих}} &= \frac{Z_1(Z_2 + Z_H) + Z_1 Z_H k\beta}{Z_1(1 + k\beta)} - Z_H = \\
 &= \frac{Z_2 + Z_H + Z_H k\beta - Z_H - Z_H k\beta}{1 + k\beta} = \\
 &= \frac{Z_2}{1 + k\beta}.
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Приклад 3. Знайти вихідний опір підсилювача з послідовним зворотним зв'язком із виходом за струмом (рис. 3.6).

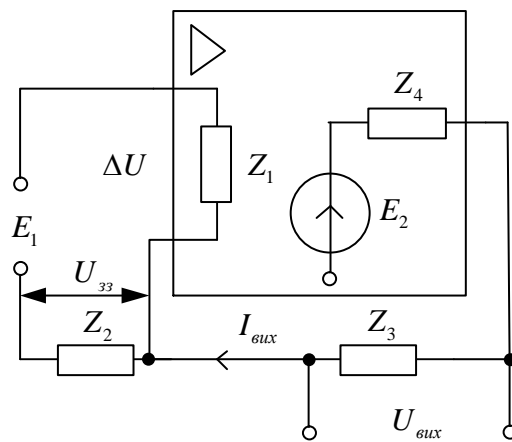


Рисунок 3.6 – Схема підсилювача з послідовним зворотним зв'язком із виходом за струмом

Еквівалентну схему підсилювача подано на рис. 3.7.

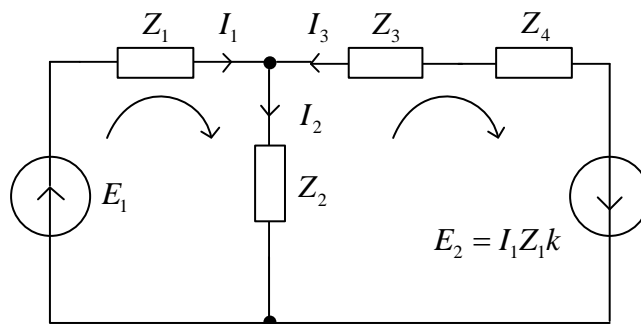


Рисунок 3.7 – Еквівалентна схема підсилювача рис. 3.6

Матричне рівняння стану кола

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -k_1 Z_1 & Z_2 & Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Визначник $\det Z = \det I_n$ не залежить від Z_n , тому для знаходження вихідного опору буде доречною формула

$$Z_{\text{вих}} = Z_4 + Z_2 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (1 + k). \quad (3.34)$$

Якщо $Z_1 \gg Z_2$, то

$$Z_{\text{вих}} \approx Z_4 + Z_2 (1 + k). \quad (3.55)$$

4. ПРОЕКТУВАННЯ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ

Вимірювальний пристрій описується рівнянням вимірювання, що встановлює зв'язок вимірюваної та вихідної величин.

Ідеалізоване рівняння вимірювання прямопоказуючих приладів (цифрових і з градуйованими шкалами), незалежно від наявності або відсутності нелінійних і функціональних перетворень блоками приладу, є рівнянням прямої $Y = X$.

У загальному випадку похибки вимірювального пристрою не відомі, як і похибки, що вносяться неінформативними параметрами сигналу. Тому рівняння вимірювання, крім невідомої вимірюваної величини, містить додаткові невідомі, які можуть бути деталізовані або представлені багатовимірним вектором, що входить до складу функції перетворення вимірювального пристрою, унаслідок чого реальна функція перетворення також виявляється невідомою.

Інакше кажучи, відомі тільки вихідна величина вимірювального пристрою та номінальна функція перетворення, а реальна функція перетворення та вимірювана величина залишаються невідомими. Вимірювальна задача підвищення точності в загальному вигляді може ставитися як задача точного визначення реальної функції перетворення або як задача виключення функції перетворення.

Точне рішення можна отримати при наявності додаткових рівнянь, якщо загальне число основного та додаткових рівнянь дорівнює числу невідомих. В іншому разі можливе рішення тільки відносно комбінації невідомих.

Залежно від способу створення додаткових рівнянь метод корекції похибок може бути представлений двома великими класами.

У першому класі додаткові рівняння створюються введенням тестових сигналів, що діють аналогічно вимірюваній величині, тобто не змінюють функцію перетворення коригуючого вимірювального пристрою.

У цьому разі система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0^*); \\ y_1 = \varphi(x_1); \\ y_2 = \varphi(x_2); \\ \dots; \\ y_n = \varphi(x_n). \end{cases} \quad (4.1)$$

де x_0^* – значення вимірюваної величини; y_0 – значення вихідної величини коригуючого пристрою; x_1, \dots, x_n – значення тестових величин; y_1, \dots, y_n – значення вихідних величин від впливу тестових величин x_1, \dots, x_n ; $y = \varphi(x)$ – функція перетворення скоригованого пристрою.

У другому класі додаткові рівняння складаються введенням тестових сигналів, деформуючих відомим чином функцію перетворення коригуючого пристрою.

У цьому разі система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0^*); \\ y_1 = \varphi_1(x_0^*); \\ y_2 = \varphi_2(x_0^*); \\ \dots; \\ y_n = \varphi_n(x_0^*). \end{cases} \quad (4.2)$$

причому не виключається можливість $y_1 = y_2 = \dots = y_n$. Тут $\varphi_2(x)$, $\varphi_n(x)$ – функції перетворення коригуючого пристрою під впливом на них відомих тестів; y_2, \dots, y_n – значення вихідної величини за постійної вхідної й деформації функції перетворення під впливом тестів.

Вимірювальні пристрої з корекцією похибки повинні містити вузли, що дозволяють створювати додаткові рівняння й забезпечувати апаратне розв'язання системи рівнянь.

Залежно від виду математичних операцій, що містяться в алгоритмі роботи пристрою з корекцією похибки, доцільно виділити дві групи алгоритмів:

- в яких використовуються тільки операції додавання-віднімання, застосовуються в пристроях адитивної корекції (ПАК).

- в яких використовуються тільки операції множення-ділення, застосовуються в пристроях мультиплікативної корекції (ПМК).

Розглянемо більш докладно алгоритм адитивної та мультиплікативної ітераційних корекцій.

Узагальнена схема пристрою, що реалізує алгоритм ітераційної корекції з часовим поділом каналів, подана на рис. 4.1.

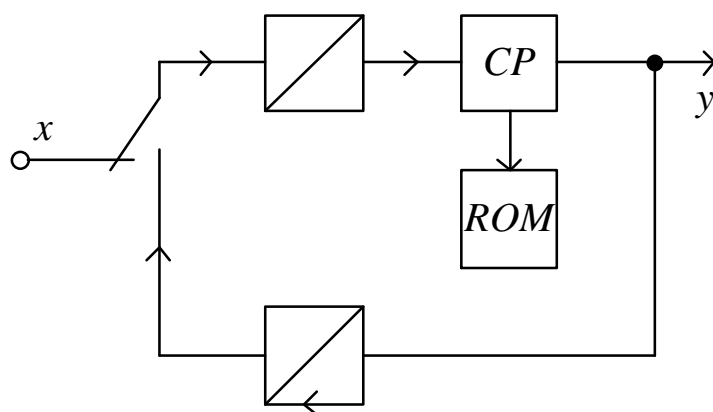


Рисунок 4.1 – Узагальнена схема пристрою, що реалізує алгоритм ітераційної корекції з часовим поділом каналів

Пристрій містить:

- пряме коло зі статичною характеристикою

$$y = \varphi(x); \quad (4.3)$$

- зворотне коло з характеристикою

$$x = f(y); \quad (4.4)$$

- обчислювальний (ОП) і запам'ятовуючий (ЗП) пристрої.

Пряме коло приладу є аналоговий або аналого-цифровий перетворювач, точність якого недостатньо висока, зворотне коло приладу має значно вищу точність перетворення.

У разі алгоритму адитивної та ітераційної корекції (ААІК) пристрій працює таким чином.

У першому такті вимірювання за допомогою прямого кола вимірювана величина x зі значенням x_0^* перетвориться в величину

$$y_0 = \varphi(x_0^*),$$

яка запам'ятовується ЗУ і далі перетворюється зворотним колом в

$$x_0 = f(y_0).$$

У другому такті вихідна величина зворотного кола x_0 перетвориться прямим колом у величину

$$y' = \varphi(x_0) = \varphi[f(y_0)] = F(y_0). \quad (4.5)$$

Перший скоригований результат за допомогою запам'ятовуючого та обчислювального пристроїв виходить за алгоритмом

$$y_1 = y_0 + y_0 - F(y_0). \quad (4.6)$$

Для отримання другого скоригованого результату y_1 перетвориться зворотним колом у величину $x_1 = f(y_1)$, яка далі перетворюється прямим колом у величину

$$y' = \varphi(x_1) = F(y_1), \quad (4.7)$$

а другий скоригований результат знаходиться за алгоритмом

$$y_2 = y_0 + y_1 - F(y_1); \quad (4.8)$$

n -й скоригований результат

$$y_n = y_0 + y_{n-1} - F(y_{n-1}), \quad (4.9)$$

де

$$F(y_{n-1}) = \varphi(x_{n-1}) = \varphi[f(y_{n-1})] \quad (4.10)$$

- результат перетворення прямої вихідної величини зворотного перетворення, що має функцію перетворення $x = f(y)$ при подачі на її вхід величини y_{n-1} .

На тій же узагальненій структурній схемі (див. рис. 4.1) розглянемо алгоритм мультиплікативної ітераційної корекції з тимчасовим поділом каналів.

У першому такті вимірювання за допомогою прямого кола коригуючого пристрою вимірювана величина x зі значенням x_0 перетворюється у величину

$$y_0 = \varphi(x_0^*),$$

яка запам'ятовується в ЗУ та перетворюється зворотним колом у

$$x_0 = f(y_0),$$

як і при адитивній корекції.

У другому такті вихідна величина зворотного кола x_0 подається на вхід коригуючого пристрою та перетворюється прямим колом у

$$y'_0 = \varphi(x_0) = \varphi[f(y_0)] = F(y_0). \quad (4.11)$$

Перший скоригований результат за допомогою ЗУ та ВУ виходить за алгоритмом

$$y_1 = y_0 \frac{y_0}{F(y_0)}. \quad (4.12)$$

Для здійснення другого такту корекції y_1 переноситься в зворотний перетворювач, вихідний сигнал якого перетвориться далі прямим колом у величину $x_1 = f(y_1)$

$$y_1 = \varphi(x_1) = F(y_1); \quad (4.13)$$

другий скоригований результат знаходиться за алгоритмом

$$y_2 = y_0 \frac{y_1}{F(y_1)}; \quad (4.14)$$

n -й скоригований результат

$$y_n = y_0 \frac{y_{n-1}}{F(y_{n-1})}. \quad (4.15)$$

Вирази (4.9) і (4.15) є рекурентними, якщо n приймає значення 1, 2, 3, ..., n .

При дослідженні ітераційних алгоритмів корекції необхідно визначити:

- границю послідовності $\{y_n\}$, якщо вона існує, і умови збіжності послідовності $\{y_n\}$ до своєї межі;
- показник швидкості збіжності;
- похибку n -го наближення.

Дослідження умов збіжності. Формули (4.9) і (4.15) можна подати у вигляді узагальненої ітераційної формули

$$y_n = A(y_0, y_{n-1}), \quad (4.16)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$; A – оператор, який діє у просторі y .

Паралельно оператору $A(y_0, y_{n-1})$ можна ввести поняття операторної функції $A(y_0, y)$, а узагальненої ітераційної формулі поставити у відповідність рівняння

$$y = A(y_0, y). \quad (4.17)$$

Нижче буде доведено, що якщо ітераційна послідовність $\{y_n\}$ сходиться в точці y^* , тобто якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$, то значення y^* є коренем рівняння (4.17). Власне, рішеннями рівняння (4.17) є точки перетину операторної функції $A(y_0, y)$ з бісектрисою координатного кута, і таких рішень у загальному випадку може бути безліч. Ті з них, які можуть бути отримані за допомогою ітераційних формул, будемо називати ітераційними коренями операторної функції, а інші – неітераційними коренями.

Для фіксованого значення вимірюваної величини x_0^* операторна функція $A(y_0, y)$ є плоскою кривою в координатах $y, A(y_0, y)$. Але вимірювана величина x (а відтак, y) має широкий динамічний діапазон.

З огляду на це, операторну функцію слід розглядати як функцію двох змінних:

$$\begin{aligned} \text{для ААІК} \quad z(x, y) &= \varphi(x) + y - F(y); \\ \text{для АМІК} \quad z(x, y) &= \varphi(x) \cdot y / F(y) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тут $z(x, y)$ є певною поверхнею, при перетині якої площинами $x = \text{const}$, паралельними вертикальній площині ZOY , у цих площинах виходять плоскі криві операторної функції $A(y_0, y)$, що відповідають певним значенням x_0^* вимірюваної величини.

Перетин поверхні $z(x, y)$ бісекторною площиною кута ZOY дасть просторові криві, проекції яких на площину ZOY дають ітераційні та неітераційні коріння. Просторові криві, що належать операторній поверхні й обмежують допустимі значення Y_0 у проекції на площину ZOY , утворюють певну область, яка може бути замкнутою або може мати особливі точки.

Узагальнений критерій збіжності тривимірного ітераційного процесу можна сформулювати наступним чином: *тривимірний ітераційний процес збігається, якщо крива $\varphi(x)$ і крива ітераційних коренів лежать всередині області, обмеженої проекціями кривих допустимих значень $y_0(x)$ і не проходять через особливі точки допустимих значень.*

Розглянемо один з перетинів вертикальною площиною $x = x^* = \text{const}$ просторової операторної функції $z(x, y)$. У перетині, як зазначалося вище, утворюється плоска крива одновимірної операторної функції $A(y_0, y)$, тобто $z(x_0^*, y) = A(y_0, y)$. Знайдемо умови існування ітераційного кореня рівняння

$$y = A(y_0, y). \quad (4.19)$$

Нехай якимось чином виділено інтервал $[a, b]$ ізоляції кореня цього рівняння, і початкове наближення y'_0 – будь-яка точка цього інтервалу.

Тоді послідовні наближення запишуться так:

$$\begin{cases} y_1 = A(y_0, y'_0); \\ y_2 = A(y_0, y_1); \\ \dots \dots \dots; \\ y_n = A(y_0, y_{n-1}). \end{cases} \quad (4.20)$$

Доведемо, що якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$ за умови неперервності оператора y^* в точці y^* , то y^* є ітераційним коренем рівняння (4.19).

Дійсно, якщо функція $A(y_0, y)$ неперервна, то

$$y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_0, y_{n-1}) = A\left[y_0 \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}\right] = A(y_0, y^*). \quad (4.21)$$

Отже, y^* є ітераційним коренем рівняння (4.19). Нескладно показати, що ітераційний корінь є значенням зворотної функції зворотного кола від шуканої величини. Наприклад, для ААІК

$$y = y_0 + y - F(y). \quad (4.22)$$

Підставляючи корінь, отримаємо:

$$\begin{cases} y^* = y_0 + y^* - F(y^*); \\ y_0 = F(y^*) = \varphi; \\ y_0 = \varphi(x_0^*) - F(y^*) = F[f(y^*)]; \\ x_0^* = f(y^*); \\ y^* = f^{-1}(x_0^*). \end{cases} \quad (4.23)$$

Для лінійного зворотного кола $x = y$ останній вираз має вигляд: $y^* = x^*$ (те ж можна показати й для АМІК).

Якщо y^* – точний корінь рівняння, то згідно з теоремою Лагранжа, використавши послідовність (4.23), можна записати

$$\begin{cases} y_1 - y^* = A(y_0, y_0^*) - A(y_0, x^*) = (y_0', y^*) A'(y_0, \xi_0); \\ y_2 - y^* = A(y_0, y_1) - A(y_0, y^*) = (y_1, y^*) A'(y_0, \xi_1); \\ y_n - y^* = A(y_0, y_{n-1}) - A(y_0, y^*) = (y_{n-1}, y^*) A'(y_0, \xi_{n-1}). \end{cases} \quad (4.24)$$

де $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ – точки, що лежать усередині інтервалів (y^*, y_0') ; (y^*, y_1) ; (y^*, y_{n-1}) . Провівши послідовні підстановки різниць в (4.23), отримаємо

$$\begin{aligned} y_n - y^* &= (y_0' - y^*) A'(y_0, \xi_0) A'(y_0, \xi_1) A'(y_0, \xi_{n-1}) = \\ &= (y_0' - y^*) \prod_{i=0}^{n-1} A'(y_0, \xi_i). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для виконання умови рівномірної збіжності, тобто такої збіжності процесу ітераційної корекції, за якої кожне наступне наближення ближче до y^* , ніж попереднє, а саме:

$$\left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y^*| < |y'_0 - y^*|; \\ |y_2 - y^*| < |y_1 - y^*|; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ |y_n - y^*| < |y_{n-1} - y^*|, \end{array} \right. \quad (4.26)$$

необхідно припустити згідно з (4.24), що всі похідні

$$A'(y_0, \xi_0); A'(y_0, \xi), \dots, A'(y_0, \xi_{n-1})$$

за модулем менше або дорівнюють певному позитивному числу M , яке менше одиниці.

З припущення (4.25) отримаємо

$$|y_n - y| \leq |(y_0 - y)| M^n. \quad (4.27)$$

Переходячи до меж правої та правої частин в останньому виразі, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(y_n - y)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |(y_0 - y)| M^n = |(y^* - y'_0)| \lim_{n \rightarrow \infty} |M|^n = 0$$

оскільки $|M| < 1$, то $\lim M^n = 0$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y) = 0 \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*.$$

Таким чином, ітераційні корені рівняння (4.19) можуть існувати тільки на ділянці біля $y \in (a, b)$, де

$$|A'(y_0, y)| \leq |M| < 1. \quad (4.28)$$

Для ААІК останній вираз набуде вигляду

$$|1 - F'(y)| \leq |M| < 1, \quad 0 < \xi \leq F'(y) \leq x < 2, \quad (4.29)$$

для лінійного зворотного кола

$$0 < \xi \leq \varphi'(y) \leq x < 2; \quad (4.30)$$

для АМІК

$$A'(y_0, y) = \frac{y_0}{F(y)} \left[1 - \frac{y'F'(y)}{F(y)} \right]. \quad (4.31)$$

Враховуючи (4.31) вираз (4.29) набуде вигляду

$$\left| 1 - \frac{y^* F'(y^*)}{F(y^*)} \right| \leq |M| < 1, \quad (4.32)$$

або

$$0 < \xi \leq \frac{y^* F'(y^*)}{F(y^*)} \leq x \leq 2. \quad (4.33)$$

Необхідно визначити область значень початкового наближення $y'_0 \in (c, d)$, де ітераційний процес сходиться до ітераційного кореня. Це важливо, бо в вимірювальних пристроях, функція перетворення прямого кола яких має безперервну похідну, початкове наближення $y'_0 = y_0 = \varphi(x_0^*)$ однозначно визначається вимірюваною величиною x_0^* , а не вибирається довільно в області ізоляції ітераційного кореня.

Обмежимо клас операторних функцій $A(y_0, y)$ таким, які мають безперервну похідну на даній ділянці аргументів. Для таких функцій можливі три випадки:

- рівняння (4.17) не має неітераційних коренів;
- неітераційний корінь розташований тільки з одного боку (ліворуч чи праворуч) від ітераційного кореня;
- ітераційний корінь розташований між двома неітераційними коренями.

У першому випадку операторна функція $A(y_0, y)$ перетинається з бісектрисою координатного кута тільки в одній точці, що є ітераційним коренем (рис. 4.2, а). В цьому випадку не виключено, що процес може виявитися не збіжним до y^* у випадку, якщо початкове наближення потрапляє в точку y^I або y^{II} , для яких значення операторної функції $A(y_0, y^I)$ і $A(y_0, y^{II})$ є протилежними вершинами квадрата, другою діагоналлю якого є бісектриса координатного кута. В цьому випадку ітераційний корінь може бути знайдено методом ітерацій, якщо початкове наближення y'_0 є абсцисою точки, розташованої всередині мінімального квадрата, що має протилежними вершинами точки операторної функції.

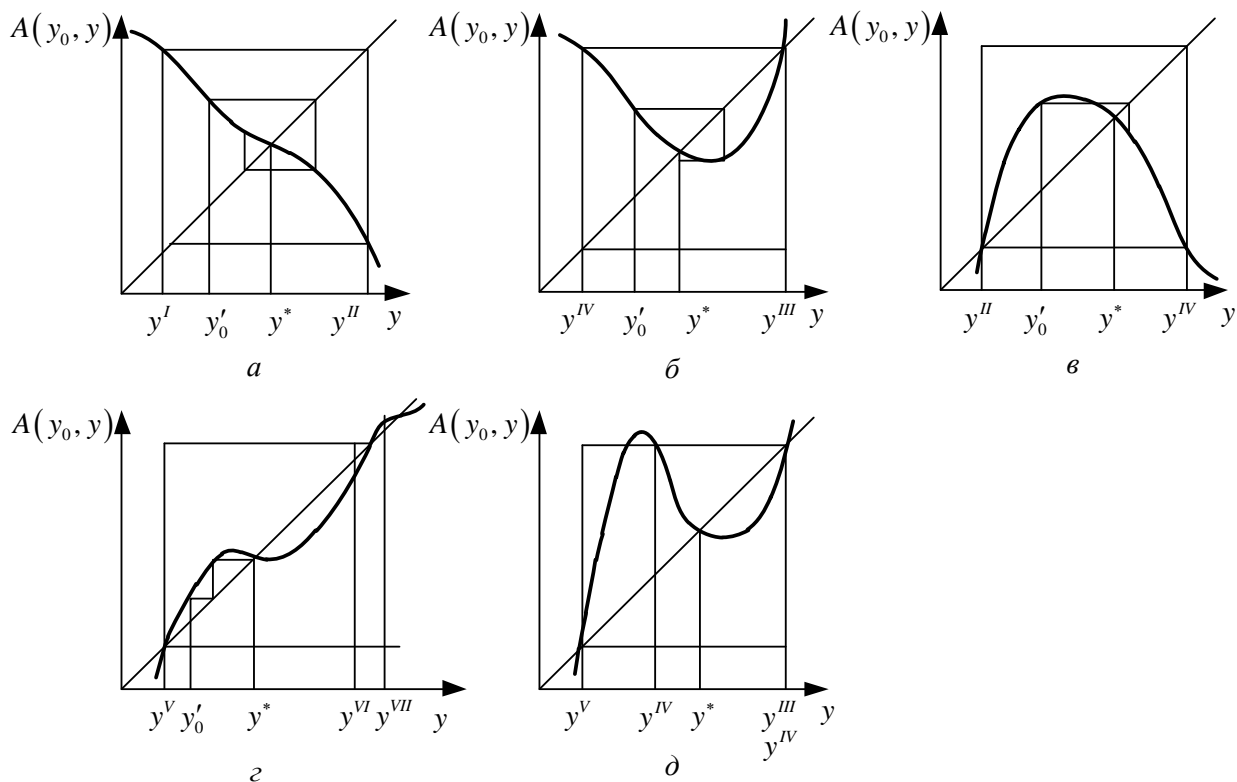


Рисунок 4.2 – Графічне зображення допустимої області збіжності

Абсциси згаданих вершин, як впливає з рис. 4.1, можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} y^I = A(y_0, y^{II}); \\ y^{II} = A(y_0, y^I). \end{cases} \quad (4.35)$$

Якщо система рівнянь (4.35) не має рішення, то збіжність до ітераційного кореня має місце за будь-якого початкового наближення.

У другому випадку (рис. 4.2, б) ітераційний корінь може бути знайдено методом ітерації; якщо початкове наближення є абсцисою точки $[y'_0, A(y', y)]$, що потрапляє в область, обмежену квадратом, одна вершина якого є найближчим неітераційним коренем, а друга (суміжна) розташована на операторній функції $A(y_0, y)$. Абсциса суміжної вершини квадрата y^{IV} є дійсним коренем рівняння

$$A(y_0, y^{IV}) = A(y_0, y^{III}) = y^{III}, \quad (4.36)$$

де y^{III} – неітераційний корінь.

Якщо рівняння (4.36) має кілька дійсних коренів, то абсциса вершини квадрата повинна бути найменш віддаленим від y^* коренем.

Рівняння (4.36) може не мати коренів. Тоді суміжна вершина квадрата віддалена на нескінченність. Якщо для цього випадку система (4.35) має рішення, тобто всередині останнього квадрата розташований квадрат згідно з першим випадком, то область збіжності визначатиметься умовами першого випадку.

У третьому випадку (див. рис. 4.2, в) ітераційний корінь може бути знайдено методом ітерацій, якщо початкове наближення є абсцисою точки, що лежить усередині квадрата, вершинами якого є найближчі неітераційні корені.

Якщо всередині цього квадрата виконуються умови першого та другого випадків, то інтервал допустимих значень визначається за мінімальним квадратом.

Таким чином, ітераційний корінь рівняння може існувати тільки на ділянці, межі якого визначаються з нерівності (4.28).

Область допустимих значень початкового наближення знаходиться шляхом послідовного рішення (4.35) і (4.36).

Оскільки у вимірювальних пристроях початкове наближення вибирається не довільно, а однозначно пов'язане зі значенням вимірюваної величини x_0^* рівнянням $y_0 = \varphi(x_0^*) = y_0$, то виникає необхідність визначити допустиму область вимірюваної величини $x \in (x_{\min}, x_{\max})$, для якої можливе знаходження ітераційних коренів методами ітеративної корекції.

Для пристрою з лінійного зворотного колом $x = y$ допустима область x визначається областю існування ітераційних коренів, тобто з нерівності (4.28).

Область допустимих значень звужується, якщо за певним $x_0^* \in (x_{\min}, x_{\max})$ опиняється за межами допустимих значень y'_0 .

Показник швидкості збіжності. Для досягнення заданої точності необхідно здійснити кілька тактів ітерації. Чим швидше буде сходиться ітераційний процес до своєї межі, тим меншу кількість тактів ітерації необхідно проробити.

Для кількісного визначення швидкості збіжності введемо поняття: показник швидкості збіжності $\eta_{n,n+1}$. Під показником швидкості збіжності будемо розуміти відношення похибки попереднього наближення до похибки подальшого:

$$\eta_{0,1} = \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|; \quad \eta_{1,2} = \left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right|; \quad \dots; \quad \eta_{(n-1),n} = \left| \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \right|, \quad (4.37)$$

де для лінійного зворотного кола

$\Delta_{0,1} = y'_0 - y^* = y'_0 - x_0$ – похибка початкового наближення;

$\Delta_1 = y_1 - y^* = y_1 - x_0^*$ – похибка першого наближення;

$\Delta_n = y_n - y^* = y_n - x_0^*$ – похибка n -го наближення.

З (4.37) випливає:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{0,1} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{1}{A'(y_0, \xi_0)}; \\ \eta_{1,2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{A'(y_0, \xi_1)}; \\ \eta_{(n-1),n} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{A'(y_{01}, \xi_{n-1})}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

З (4.38) видно, що показник швидкості збіжності в загальному випадку залежить як від значення вимірюваної величини x_0^* , так і від номера такту ітерації. Від цих величин залежить ξ_i , а значить, значення похідної $A'(y_0, \xi_i)$.

Чим менше за абсолютним значенням похідна операторної функції, тим більше показник швидкості збіжності й тим швидше сходиться ітеративний процес.

Для ітераційного процесу різниці, що сходиться $|y_i - y^*|$ (при лінійному зворотному колі $y_i - x_0^*$) зменшуються зі збільшенням номери ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) Отже, абсциси y_i при збільшенні n наближаються до y^*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n-1,n} = \frac{1}{[1 - \varphi'(x_0^*)]}.$$

Тому за великих n показник швидкості збіжності наближається до постійної величини, обернено пропорційної похідної операторної функції в точці збіжності. Уведемо поняття граничного значення показника швидкості збіжності.

$$\eta = \frac{1}{1 - K} = \frac{1}{-\gamma}, \quad (4.39)$$

де γ – мультиплікативна похибка.

Якщо при будь-якому значенні ξ виявиться, що $A'(y_0, \xi_i) = 0$, то показник швидкості збіжності перетвориться у нескінченність. Це свідчить про те, що y_n приблизно дорівнює ітераційному кореню y^* . Такий випадок можливий для ААК у разі лінійного прямого і зворотного кіл за відсутності мультиплікативної похибки.

Для АМК за лінійного прямого кола $y = Kx + b$ і лінійного зворотного кола $x = y$ нескладно отримати значення показника швидкості збіжності

$$\eta_{n,n+1} = \frac{xq^n \left(1 - \frac{xq}{b} \left[1 - q^{n+1} \left(1 - \frac{xq}{b} \right) \right] \right)}{\left[1 - q^n \left(1 - \frac{xq}{b} \right) \right] xq^{n+1} \left(1 - \frac{xq}{b} \right)} = \frac{1}{q} \frac{1 - q^{n+1} \left(1 - \frac{xq}{b} \right)}{1 - q^n \left(1 - \frac{xq}{b} \right)}, \quad (4.40)$$

де $q = \frac{\delta}{1 + \delta}$ (δ – відносна адитивна похибка).

З виразу (4.40) випливає, що показник швидкості збіжності для мультиплікативної корекції є нелінійна функція числа тактів і початкової похибки коригованого пристрою. При переході до межі формула (4.40) спрощується:

$$\lim \eta_{n,n+1} = \frac{\delta}{1 + \delta}.$$

Показник швидкості збіжності збільшується при зменшенні відносної адитивної похибки і наближається до нескінченності при наближенні адитивної відносної похибки до нуля. При збільшенні b показник швидкості збіжності наближається до одиниці. Це свідчить про те, що значення двох поруч розташованих похибок приблизно рівні, тобто $\Delta_n \approx \Delta_{n+1}$.

Похибка n -го наближення. Узявши добуток показників швидкості збіжності та використавши (4.182), отримаємо

$$\eta_{0,1} \eta_{1,2} \eta_{2,3}, \dots, \eta_{n-1,n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \dots \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n A'(y_0; \xi_i)}. \quad (4.41)$$

З (4.41) випливає, що збіжність ітераційного процесу буде знакозмінною, тобто наближення розташовуються почергово з обох боків змінного значення y^* , якщо всі похідні $A'(y_0; \xi_i)$ на даній ділянці негативні. Збіжність буде монотонною, тобто всі наближення розташовуються з одного боку від y^* , якщо похідні позитивні.

Звідси абсолютна похибка n -го наближення

$$\Delta_n = \Delta_0 \prod_{i=0}^n A'(y_0, \xi_i) = \Delta_0 \prod_{i=0}^n \frac{1}{\eta_{(i-1),i}}.$$

З останнього виразу для лінійних прямого і зворотного кіл можна отримати необхідне число тактів корекції.

Для ААІК

$$n = \frac{\ln \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \right|}{-\ln |\gamma|}; \quad (4.42)$$

для АМІК

$$n = \frac{\ln \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \right|}{-\ln |\delta|}. \quad (4.43)$$

Вирази (4.42) і (4.43) свідчать, що використання ААІК ефективно при малій мультиплікативній похибці, а використання АМІК ефективно при малій адитивній похибці.

5. ПРОЕКТУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

У вимірювальній техніці широко застосовуються функціональні перетворювачі, за допомогою яких виражається функціональний нелінійний зв'язок $y = \varphi(x)$. При використанні спеціальних схем зв'язок $y = \varphi(x)$ моделюється у вигляді кусково-лінійної залежності (рис. 5.1).

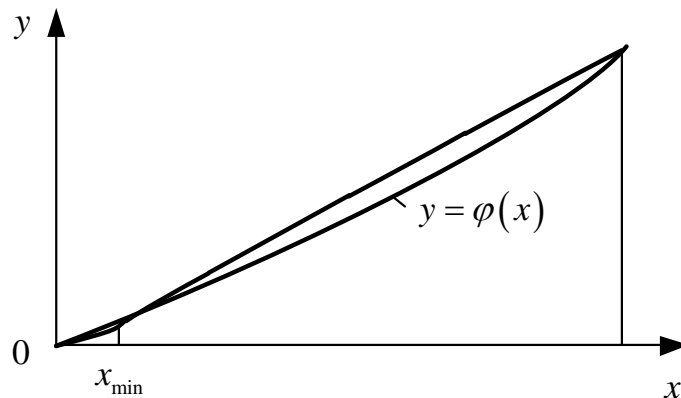


Рисунок 5.1 – Ділянка апроксимації залежності $y = \varphi(x)$ відрізком прямої

Розрахунок параметрів таких кусково-лінійних апроксиматорів – завдання досить складне й трудомістке, тому використання ЕОМ дозволяє автоматизувати процес розрахунку елементів функціональної схеми, зменшити витрати праці, з високим ступенем точності розрахувати всі необхідні параметри.

Задана нелінійна функціональна залежність $y = \varphi(x)$ на практиці зазвичай апроксимується кусково-лінійною залежністю з урахуванням різних похибок, а саме:

- апроксимація по максимально припустимій абсолютній похибці Δy_{\max} , яка приймається постійною на всіх ділянках апроксимації;
- апроксимація по максимально допустимій відносній похибці δy_{\max} , постійної на всіх ділянках апроксимації;
- апроксимація по максимально допустимій приведеній відносній похибці

$$\bar{\delta}_{\max} = \frac{\Delta y_{\max}}{y_n},$$

де Δy_{\max} – максимально допустима абсолютна похибка апроксимації; y_n – номінальне значення величини.

Нині широке поширення під час проектування кусково-лінійних апроксиматорів отримала методика, основна ідея якої зводиться до отримання певного трансцендентного рівняння для відношення початку й кінця відрізка, а рівняння визначається типом апроксимуючого зв'язку $y = \varphi(x)$ і видом похибки, але якою проводиться апроксимація. Рішення одержують відносно координат ділянок апроксимації, а також нахилів апроксимуючих відрізків.

Подібні рівняння отримані та розв'язані аналітично тільки для деяких видів функції $\varphi(x)$.

Проте існуюча методика розрахунку не завжди може бути з успіхом застосована при розрахунку кусково-лінійних апроксиматорів, оскільки не завжди вдається отримати рівняння, за яким похибка визначається тільки відношенням кінця й початку апроксимуючого відрізка та не залежить від початку координат (наприклад, під час апроксимації деяких залежностей по $\delta_{y_{\max}}$). Розв'язок отриманого трансцендентного рівняння представляє відомі труднощі.

Тому нижче наводиться методика розрахунку, яка базується на використанні ЕОМ і багато в чому вільна від вказаних недоліків. Крім того, пропонується методика легко може бути узагальнена на випадок табличного завдання функції, що апроксимується.

Для мінімізації апаратних витрат, що однозначно пов'язано з мінімізацією кількості ділянок апроксимації, апроксимацію здійснюють січними та вибирають довжину апроксимуючої ділянки з умови рівності максимальних значень позитивної та негативної похибки, як показано на рис. 5.2,

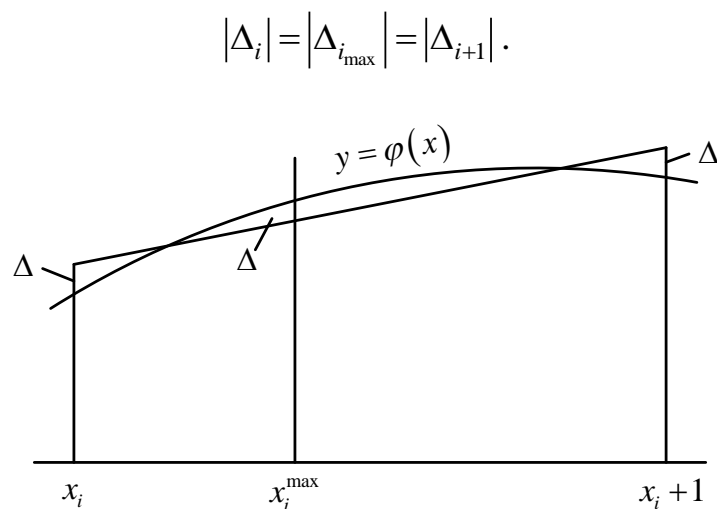


Рисунок 5.2 – Вибір довжини апроксимуючої ділянки

За тією ж максимальної абсолютної похибки довжина ділянки, що апроксимується січною, більше довжини ділянки, що апроксимується хордою.

Розглянемо i -у ділянку апроксимації залежності $y = \varphi(x)$ відрізка прямої $K_i x_i + b_i$. Для точки x_i можна записати рівність

$$K_i x_i + b_i - \Delta_i = \varphi(x_i), \quad (5.1)$$

де Δ_i – похибка заданого виду, тобто

$$\Delta_i = \begin{cases} p \Delta y_{\max}; \\ p \delta_{y_{\max}} \varphi(x_i); \\ p \Delta y_n, \text{ де } \Delta y_n = \delta_{\max} y_n; \\ p = -\text{sign } \varphi''(x). \end{cases}$$

Аналогічні співвідношення можуть бути записані також і для інших характерних точок ділянки апроксимації: для точки x_{i+1} – кінця ділянки апроксимації

$$K_i x_{i+1} + b_i - \Delta_{i+1} = \varphi(x_{i+1}); \quad (5.2)$$

для точки x_i^{\max}

$$K_i x_i^{\max} + b_i + \Delta_{i_{\max}} = \varphi(x_i^{\max}). \quad (5.3)$$

Координата максимальної похибки x_i^{\max} всередині ділянки апроксимації визначається з відомої умови

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0,$$

звідки

$$\varphi'(x_i^{\max}) \frac{K_i}{C}, \quad (5.4)$$

де

$$C = \begin{cases} 1, & \text{якщо апроксимація проводиться по } \Delta y_{\max}; \\ 1 - p \delta_{y_{\max}}, & \text{якщо апроксимація проводиться по } \delta_{y_{\max}}. \end{cases}$$

Для визначення параметрів апроксимуючої прямої по заданій похибці з отриманих рівнянь маємо:

- з рівняння (5.1)

$$b_i = \varphi(x_i) + \Delta_i - K_i x_i; \quad (5.5)$$

- з рівняння (5.3)

$$K_i = \frac{\varphi(x_i^{\max}) - \varphi(x_i) - \Delta_i - \Delta_{i_{\max}}}{x_i^{\max} - x_i}. \quad (5.6)$$

З урахуванням (5.6) виходячи з (5.4)

$$x_i^{\max} = x_i + \frac{\varphi(x_i^{\max}) - \varphi(x_i) - \Delta_i - \Delta_{i_{\max}}}{C\varphi(x_i^{\max})}. \quad (5.7)$$

З рівняння (5.2) знаходимо координату правого кінця ділянки апроксимації

$$x_{i+1} = \frac{\varphi(x_{i+1}) + \Delta_{i+1} - b_i}{K_i}. \quad (5.8)$$

Таким чином, апроксимація вихідної кривої може бути здійснена в такий спосіб:

- визначається x_i^{\max} за рівнянням (5.7); точка x_i або задається і в цьому випадку може бути початковою точкою апроксимації розглянутої кривої, або є правим кінцем попередньої ділянки апроксимації;
- розраховуються параметри відрізка прямої K_i і b_i за формулами (5.6), (5.5);
- знаходиться точка x_{i+1} за рівнянням (5.8).

Далі, беручи за початок наступної ділянки апроксимації точку x_{i+1} , розрахунок повторюється для $i + 1$ ділянки апроксимації.

Рішення алгебраїчних рівнянь (5.7), (5.8) може бути отримано одним з відомих методів, наприклад методом Ньютона.

За допомогою ЕОМ можна розрахувати параметри елементів кусково-лінійних апроксимацій шляхом внесення певної зміни, яка визначається різницею тангенсів кутів нахилу апроксимуючих прямих попередньої та наступних ділянок.

Основу схеми перетворювачів складають суматор і апроксимуючі ланки (рис. 5.3).

Їхня кількість визначається кількістю ділянок апроксимації.

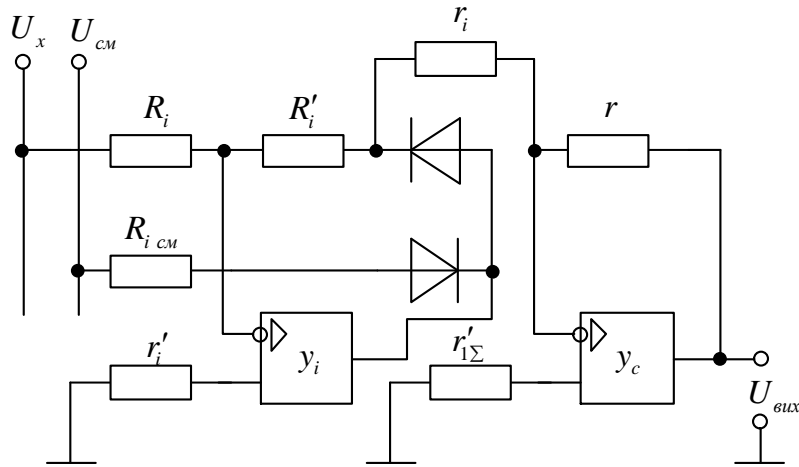


Рисунок 5.3 – Суматор і апроксимуюча ланка

Параметри апроксимуючих ланок і суматора можуть бути розраховані таким чином.

Ставлячи значення $R_i = R'_i = R$, r , $U_{см}$ та визначивши кількість і параметри ділянок апроксимації, отримаємо

$$r_i = \frac{r}{K'_i},$$

де K'_i – різниця тангенсів кутів нахилу, апроксимуючих прямих i -го і $i-1$ -го ділянок;

$$R_{i см} = \frac{U_{см}}{U_i} R,$$

де U_i – координати початку відрізків апроксимації;

$$r'_i = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R_{i см}}}, \quad (5.9)$$

що необхідно для початкового симетрування входів диференціального підсилювача.

Відрізок $\varphi(x)$ на ділянці від 0 до $x_{i \min}$ може бути заданий двома способами:

- на відрізьку за апроксимуючу пряму прийнято продовження прямої першої ділянки апроксимації (рис. 5.4),

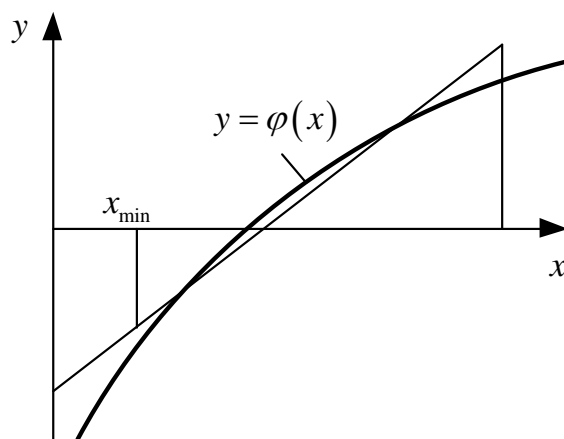


Рисунок 5.4 – Графік апроксимації початкової ділянки продовженням першої ділянки

тоді

$$R_{1cm} = \frac{U_{cm}}{|b_1|} R; \quad r'_{1\Sigma} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} + \frac{1}{R_{1cm}}}; \quad (5.10)$$

- на ділянці $0 - x_{\min}$ крива апроксимується відрізком прямої, яка проходить через початок координат, тоді

$$R_{1cm} = 0; \quad r'_{1\Sigma} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}}, \quad (5.11)$$

де n – кількість ділянок апроксимації діапазону

$$x_{\min} - x_{\max} \cdot$$

У першому випадку на вході апроксиматора перед першою апроксимуючою ланкою ставляться відповідно два опори за схемою, наведеної на рис. 5.5.

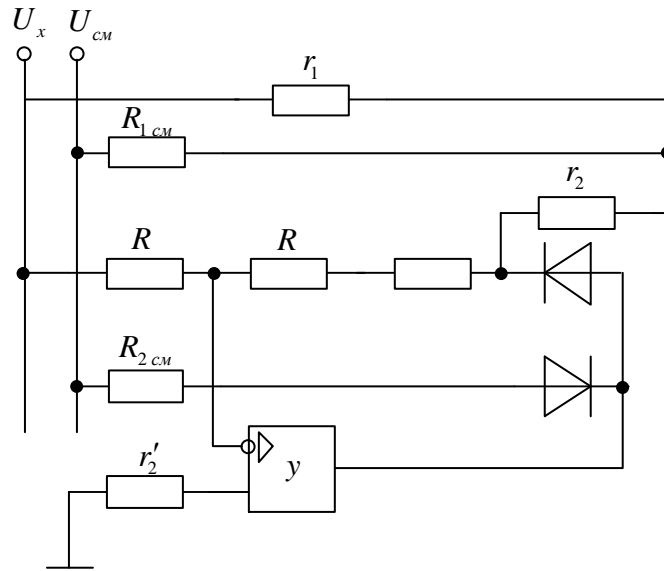


Рисунок 5.5 – Початкова ланка апроксиматора з продовженням першої ділянки

У другому випадку перший апроксимуюча ланка будується для апроксимації відрізка $0 - x_{\min}$ за схемою, наведеної на рис. 5.6.

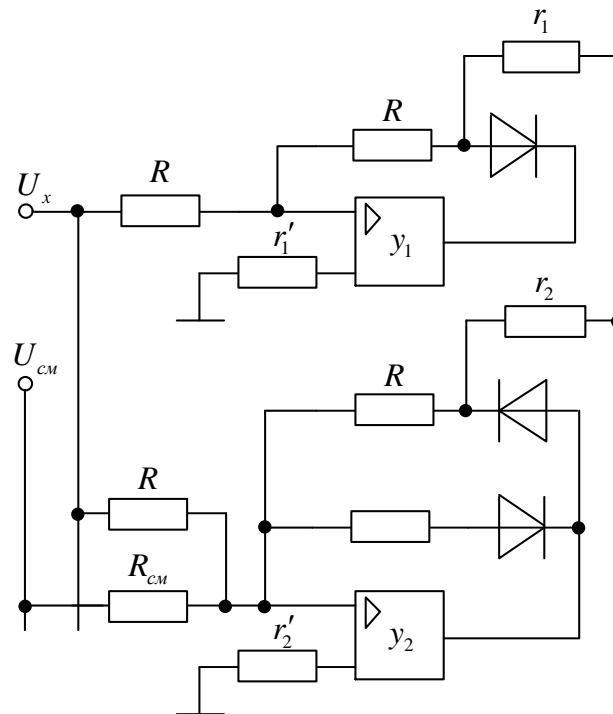


Рисунок 5.6 – Початкова ланка апроксиматора з початку координат

6. ПРОГРАМА АВТОМАТИЗОВАНОГО АНАЛІЗУ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ (ПААВП)

Дане програмне забезпечення дозволяє реалізувати в автоматичному режимі положення викладені в попередніх розділах – складання матричної моделі на основі ρ – методу, методу траєкторій – для обчислення визначників матричної моделі похибок. ПААВП виконує арифметичні операції над результатами символічних розрахунків.

6.1. Опис програми ПААВП

Програма ПААВП дозволяє розраховувати визначники систем рівнянь в символічному вигляді. Програма проводить графічну побудову вимірювальних кіл та аналіз їх характеристик, автоматичну генерацію систем рівнянь в матричній формі та її подальший розрахунок.

Програма дозволяє створювати, редагувати, аналізувати та зберігати моделі (графічні, матричні та вихідні рівняння) вимірювальних кіл. ПААВП написаний на мові C# з графічним інтерфейсом на мові XAML. Для запуску програми додатково повинно бути встановлене середовище виконання .NET 4 Framework. ПААВП не потребує встановлення і запускається з будь-якого носія.

Головне вікно ПААВП. На рис. 6.1 зображено головне вікно програми. Основними елементами вікна є:

- панель інструментів;
- вікно вводу матричної моделі;
- вікно підстановки значень змінних моделі;
- вікна виводу результатів розрахунку.

Головне вікно програми призначене для введення матричної моделі вимірювальних кіл власноруч користувачем або на основі автоматичного розрахунку графічної моделі кола.

Панель інструментів головного вікна. Складається з піктограм команд, які керують процесом створення, збереження, редагування та аналізу матричної моделі. В таблиці 6.1 наведено перелік команд та короткий опис їх функцій.

Програма працює в двох основних режимах:

1. режим матричної моделі – розмір матриці та її елементи вводяться користувачем;
2. режим структурної схеми – на основі створеної структурної схеми генерується матрична модель, яку користувач може змінити тільки змінивши структурну схему.

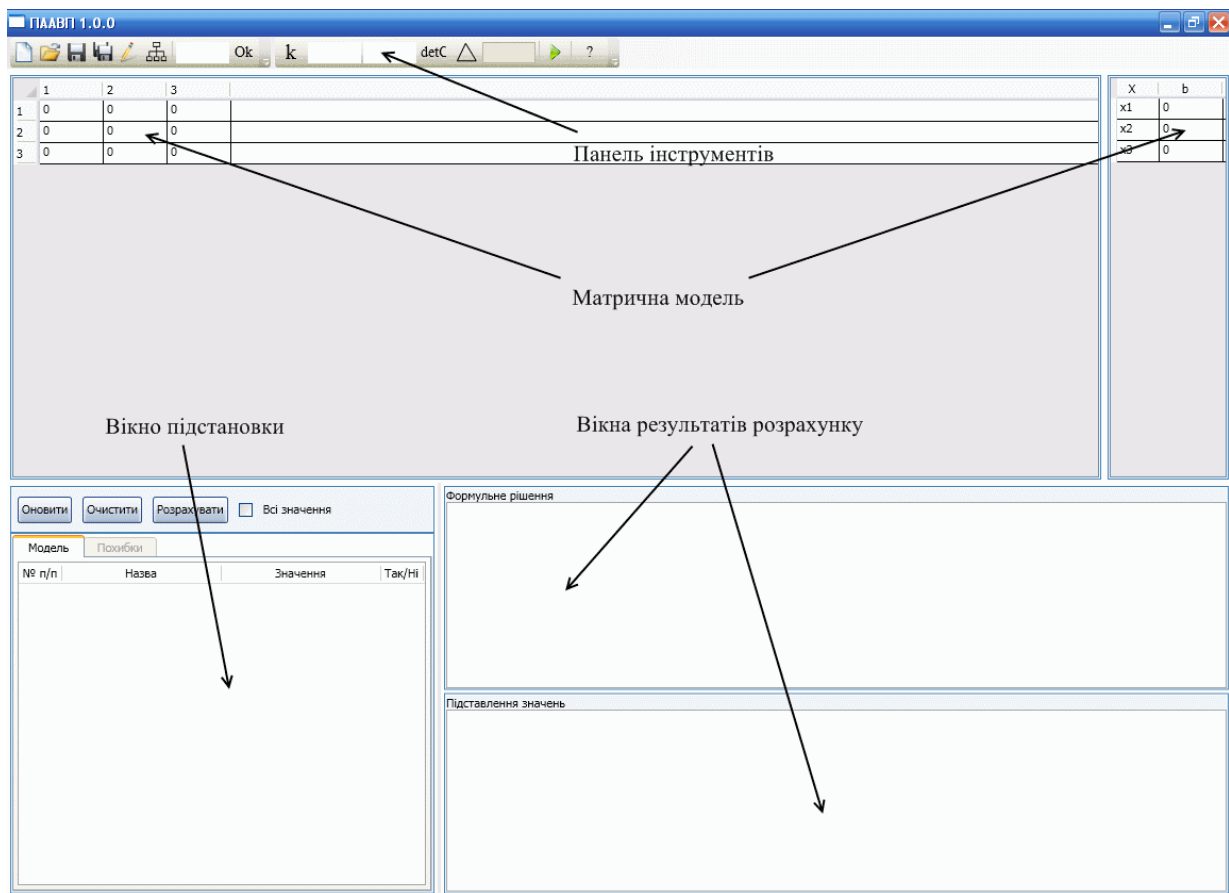












Рис. 6.1. Головне вікно програми ПААВП

Таблиця 6.1

Команди панелі інструментів

	Створення нової моделі
	Відкрити збережену модель
	Збереження матричної моделі
	Повне збереження. Збереження графічної і матричної моделі
	Редагування матричної моделі
	Виклик вікна побудови структурної схеми
Ok	Підтвердження нового розміру матриці
k	Розрахунок повного коефіцієнту передачі
detC	Розрахунок визначника матриці коефіцієнтів
	Розрахунок детермінованої моделі похибок
	Запуск розрахунку
?	Відомості про програму

Можливий перехід між режимами. Команда  викликає вікно редактора структурних схем, тим самим програма переходить в режим структурної схеми. Команда редагування  переводить програму в режим матричної моделі. Дана команда стає активною при наявності структурної схеми.

Команда створення нової моделі видаляє попередню (графічну і матричну), значення підстановки та результати розрахунку.

Команда відкрити завантажує матричну модель і структурну схему (за наявності). В залежності від наявності структурної схеми програма переводиться в один з двох режимів.

Збереження матричної моделі включає в себе збереження значень підстановки та результатів розрахунку. Повне збереження – зберігаються матрична модель (файл з розширенням .md) з підставленими значеннями та результатами, і структурна схема (файл з розширенням .bs) в вибраному каталозі.

Команда редагування доступна при наявності структурної схеми. Вона дозволяє редагувати матричну модель, але видаляє структурну схему.

Для зміни розміру матриці потрібно ввести значення в поле зображене на рис. 6.2 і натиснути н піктограму «Ok» (команда доступна в режимі введення матричної моделі).

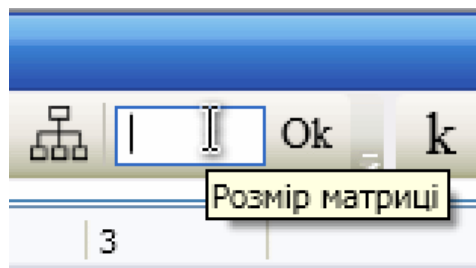


Рис. 6.2. Поле для введення розміру матриці і піктограма підтвердження введення

Для розрахунку довільного коефіцієнту передачі потрібно ввести номери вихідного і вхідного сигналів в поля, зображені на рис. 6.3.

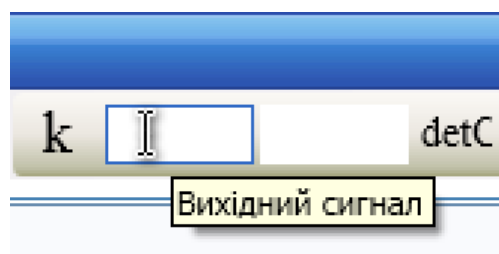


Рис. 6.3. Поля введення вихідного і вхідного сигналів для розрахунку коефіцієнту передачі

Команда розрахунку детермінованої моделі похибок активує поле введення порядку похибки (рис. 6.4).

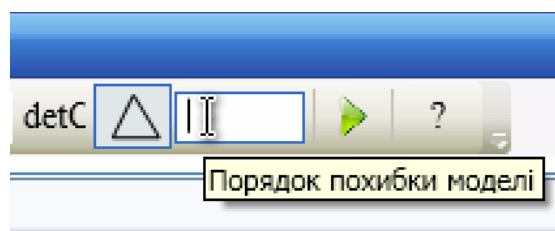


Рис. 6.4. Піктограма розрахунку детермінованої похибки моделі і поле введення порядку похибки

Вікно введення матричної моделі. Дане вікно містить (рис. 6.5):

- таблицю введення коефіцієнтів;
- таблицю невідомих і правих частин.

	1	2	3	4	5		X	b
1	0	0	0	0	0		x1	0
2	0	0	0	0	0		x2	0
3	0	0	0	0	0		x3	0
4	0	0	0	0	0		x4	0
5	0	0	0	0	0		x5	0

Рис. 6.5. Вікно введення матричної моделі

В клітинки таблиці можна вводити числа (десятковий роздільник - кома) або вирази « $-15*a_{4,3}*x_1+d(x_1)*a_{2,1}$ », без пробілів. ПААВП розраховує визначники числових, символічних або змішаних матриць. Програма дозволяє копіювати вміст матриць і вставляти, наприклад в Mathcad, Matlab або Excel. В порівнянні з Matlab ПААВП не потребує попереднього створення і присвоєння символічних змінних, що значно скорочує час введення.

Вікно підстановки значень змінних. Дане вікно дозволяє виконувати підстановки значень змінних матричної моделі та моделі похибок. Воно містить дві вкладки. Перша дозволяє виконувати підстановки значень змінних матричної моделі (рис. 6.6). Друга – підстановки значень змінних моделі похибок (рис. 6.7). Друга вкладка активується при виборі команди розрахунку детермінованої моделі похибок Δ .

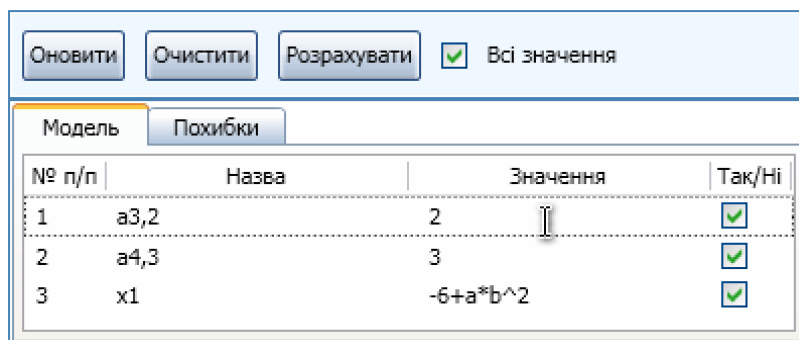


Рис. 6.6. Вкладка підстановки значень змінних матричної моделі

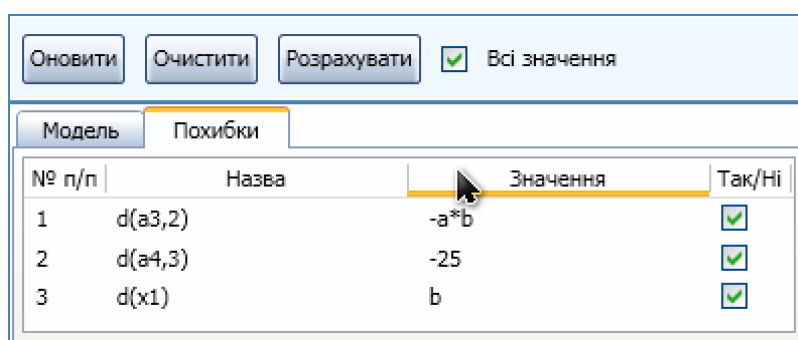


Рис.6.7. Вкладка підстановки значень змінних моделі похибок


В таблиці 6.2 наведено функції піктограм, які розташовані на панелі вгорі вікна.

Таблиця 6.2

Команди піктограм вікна підстановки

	Оновлює список змінних
	Очищує всі значення підстановки
	Запуск підстановку (якщо проведені символльні розрахунки)
<input checked="" type="checkbox"/> Всі значення	Вибір всіх значень підстановки

Для того щоб змінні матричної моделі або моделі похибок з'явилися в переліку вкладки «Модель/Похибки» (рис. 6.6) потрібно вибрати відповідну вкладку і натиснути на піктограму . Підстановку значень можна проводити безліч разів в разі попереднього розрахунку визначника та коефіцієнтів передачі.

Вікна результатів розрахунку. В вікно «Формульних результатів» виводяться результати розрахунку в символічному вигляді в залежності від вибраних команд. Після запуску команди розрахунку  в дане вікно виводяться формульні результати, якщо введені значення підстановки і вибрані змінні для підстановки в вікно «Числові результати» виводяться результати підстановки (рис. 6.8). Отримане передаточне рівняння дозволяє отримувати значення визначників матриць на основі значень змінних без повторного розрахунку матриць.

Вікно редактора структурних схем. Редактор структурних схем дозволяє створювати, зберігати та редагувати структурну схему вимірювального пристрою і автоматично її розраховувати (рис 6.8). Таблиця 6.3 містить перелік команд панелі інструментів.

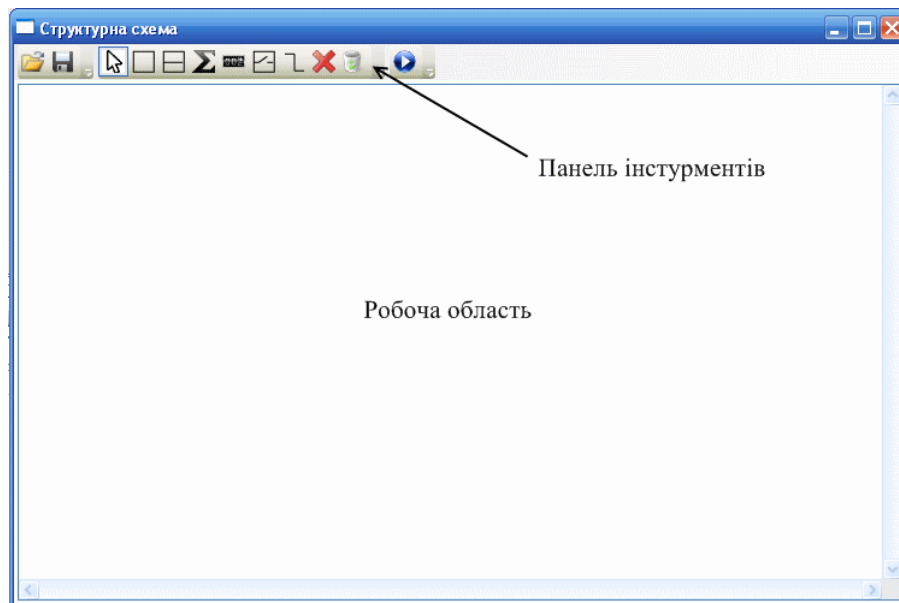









Рис. 6.8. Вікно редактора структурних схем

Таблиця 6.3

Команди панелі інструментів редактора структурних схем

	Відкрити збережену структурну схему
	Збереження структурної схеми
	Курсор – скасовує будь-які попередньо вибрані блоки
	Однонаправлений блок
	Двонаправлений блок
	Суматор
	Реверсивний лічильник

	Перемикач
	З'єднання
	Видалити елемент
	Очистити схему
	Запуск розрахунку

Даний редактор містить бібліотеку блоків і зв'язків між ними для побудови структурної схеми вимірювального пристрою. Для вставлення елемента бібліотеки в робочу область вікна потрібно лівою клавішею миші (ЛКМ) вибрати піктограму з відповідним елементом і потім перевести курсор миші в робочу область і натиснути ЛКМ. Кожен елемент бібліотеки має вікно редагування, яке викликається з контекстного меню при натисненні правою клавішею миші (ПКМ) на відповідний елемент в робочому вікні, і вибору команди «Змінити вміст» (рис. 6.9).

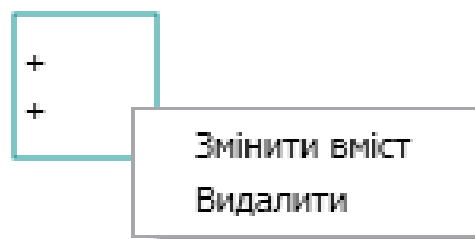






Рис. 6.9. Контекстне меню редагування елементів бібліотеки

Варто зазначити, що всі команди продовжують виконуватись при кожному натисканні ЛКМ доки активна відповідна піктограма на панелі інструментів (стосується піктограм блоків, з'єднання та видалення елементів).

Елементи бібліотеки видаляються вибором відповідної команди панелі інструментів або контекстного меню. Якщо використовується панель інструментів для видалення елемента, то потрібно вибрати піктограму  і потім натиснути ЛКМ на потрібні елементі для видалення. Повне очищення робочої області настає при виборі піктограми .

В усіх вікнах редагування вмісту непотрібно використовувати пробіл! Для позначення коефіцієнтів перетворення блоків ,  потрібно використовувати букви алфавіту, які вибираються користувачем довільно. Потім вказуються: номер вихідного сигналу, розділювач – кома, номер вхідного сигналу. Наприклад, a10,1.

Блоки панелі інструментів моделюють перетворюючі елементи вимірювального пристрою. До них належать:

1. Однонаправлений блок – перетворення відбуваються в одному напрямку прямому або зворотному. Напрямок перетворення встановлюється користувачем і вказується підчас введення коефіцієнту перетворення (рис. 6.10): пряме перетворення – $a_{3,2}$, зворотне перетворення – $a_{2,3}$. Напрямок перетворення впливає на заповнення матриці коефіцієнтів системи рівнянь. Зворотній зв'язок позначається знаком мінус перед коефіцієнтом і впливає на знак коефіцієнту перетворення в матриці коефіцієнтів.

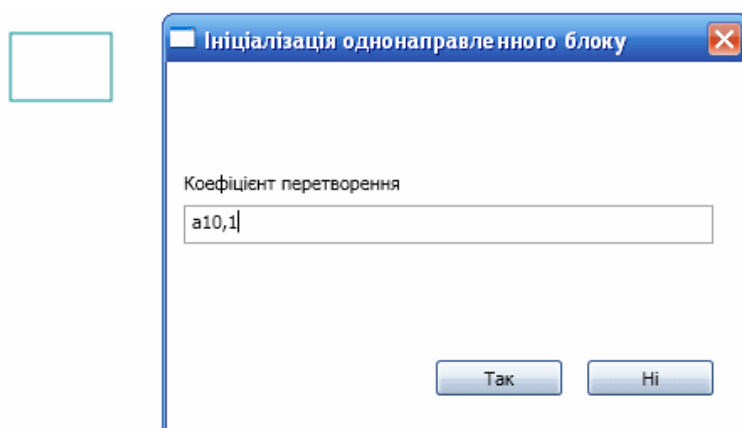


Рис. 6.10. Вікно введення коефіцієнту перетворення однонаправленого блоку

2. Двонаправлений блок – перетворення можуть відбуватись в обох напрямках, а також можуть передаватись два сигнали (рис. 6.11). Знаки мають таке ж значення як і в однонаправленому блоці.

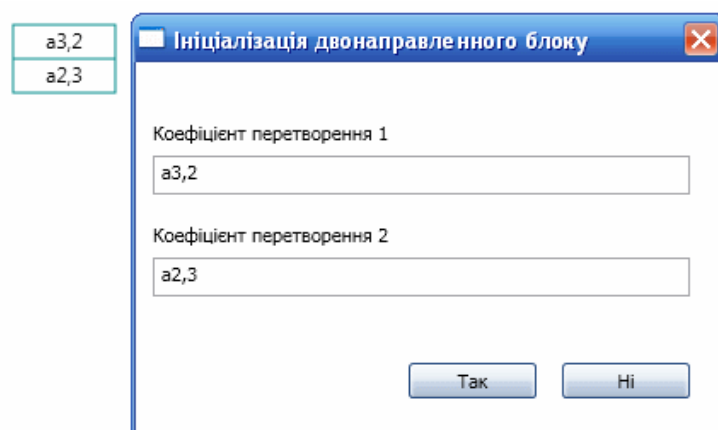


Рис. 6.11. Вікно введення коефіцієнтів перетворення двонаправленого блоку

3. Суматор – підсумовує вхідні сигнали. В вікні ініціалізації суматора за допомогою символів «-» і «+» вказуються кількість вхідних сигналів і операції над ними (рис. 6.12). В таблицю коефіцієнтів системи рівнянь суматор записується одиницею зі знаком.

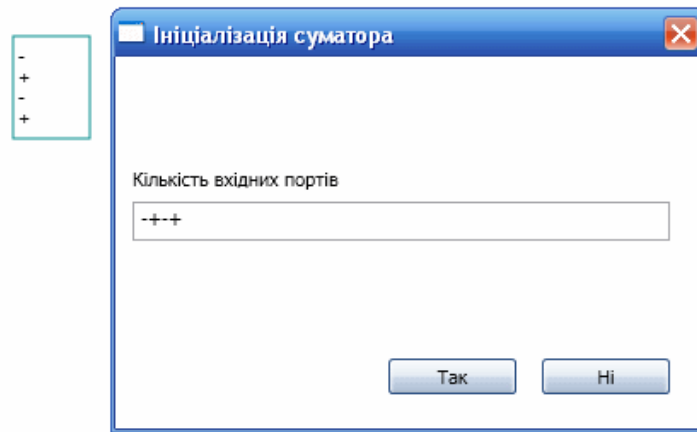


Рис. 6.12. Вікно ініціалізації суматора.

4. Реверсивний лічильник – виконує роль суматора, але в таблицю коефіцієнтів системи рівнянь вводяться коефіцієнти перетворення зі знаком (рис 6.13).

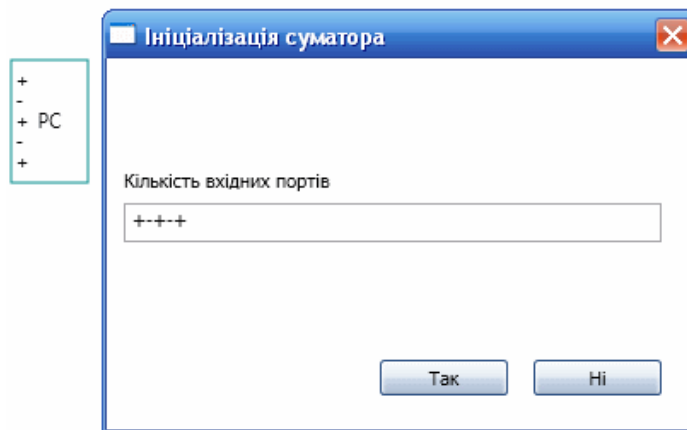


Рис. 6.13. Вікно ініціалізації реверсивного лічильника.

5. Перемикач – виконує функцію перемикання каналів передачі. В вікні ініціалізації вказується кількість вхідних і вихідних сигналів (рис. 6.14). Кількість сигналів на одній стороні блоку повинна дорівнювати одиниці, а на іншому боці – за вибором користувача. Якщо обидві сторони будуть містити більше одного сигналу буде виведено вікно сигналізації помилки і ініціалізація не відбудеться (рис. 6.15).

З'єднання моделюють канали передачі сигналів між блоками. В вікні ініціалізації сигналу потрібно вказати: номер сигналу і визначити вхідний це сигнал чи ні (рис 6.16). Знак «>» біля номеру сигналу вказує на те, що цей сигнал – вхідний. Вхідні сигнали використовуються для заповнення матриці правих частин системи рівнянь.

Всі блоки повинні бути з'єднані і кожне з'єднання повинно бути приєднане як мінімум до одного блоку. Дана програма дозволяє створювати розгалуження сигналів (рис. 6.17).

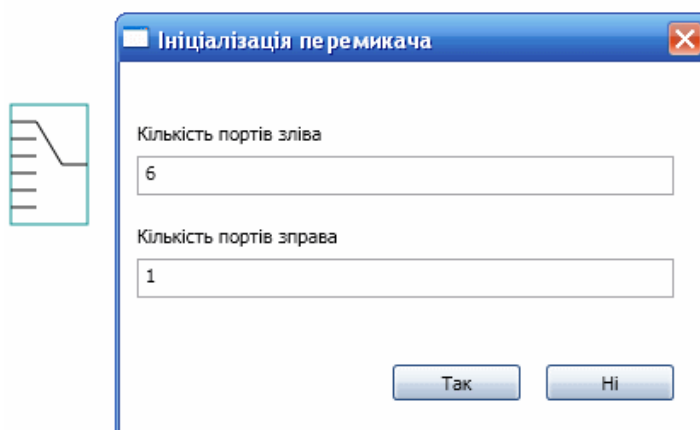


Рис. 6.14. Вікно ініціалізації перемикача

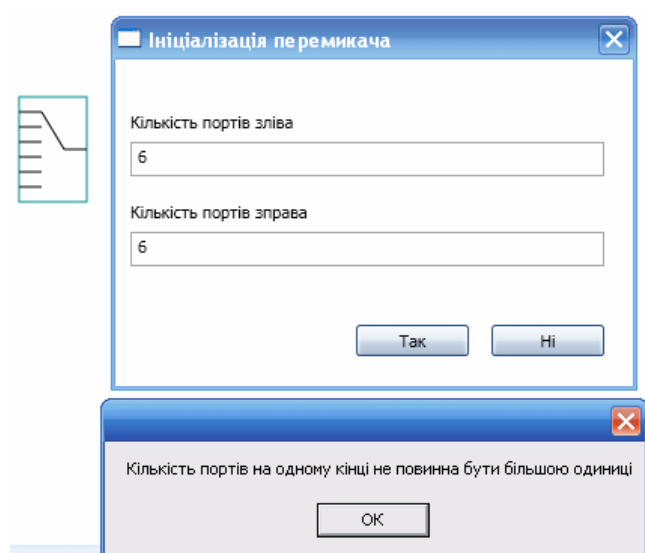


Рис. 6.15. Вікно помилки ініціалізації перемикача

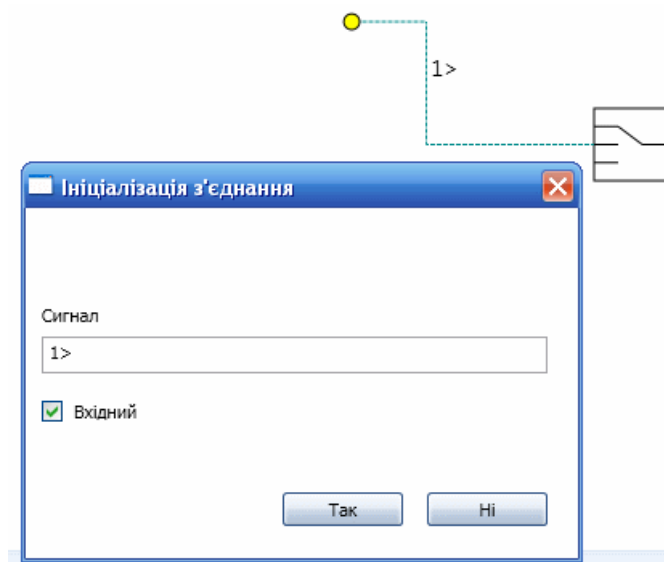


Рис. 6.16. Вікно ініціалізації з'єднання

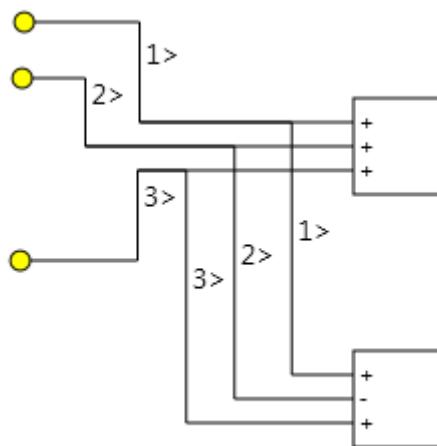



Рис. 6.17. Приклад розгалуження каналів передачі сигналів

Розрахунок структурної схеми виконується при натисненні на піктограму  і вікно редактора закривається. Програма працює в режимі структурної схеми. При неправильному введенні параметрів структурної схеми будуть видані сповіщення про відповідні помилки.

6.2. Приклад аналізу

Проаналізуємо вольтметра ефективних значень з адитивною корекцією похибок і часовим розділенням каналів. Структурна схема і матрична модель зображені на рис. 6.18 – 6.19.

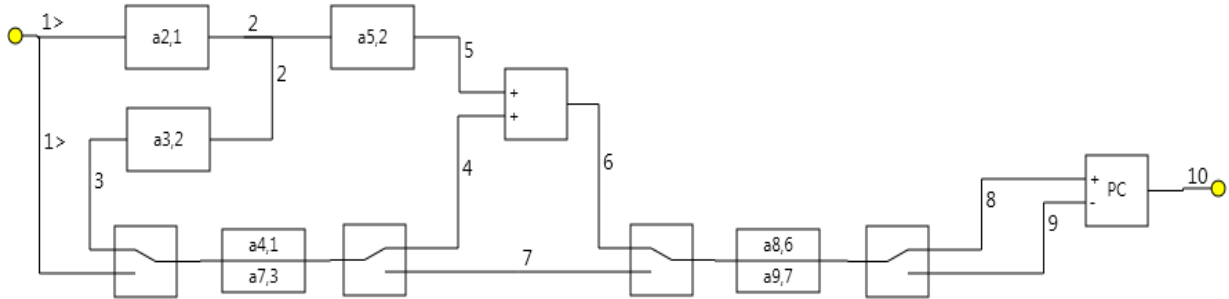


Рис. 6.18. Структурна схема

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	X	b
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x1	x1
2	-a2,1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	x2	0
3	0	-a3,2	1	0	0	0	0	0	0	0	x3	0
4	-a4,1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	x4	0
5	0	-a5,2	0	0	1	0	0	0	0	0	x5	0
6	0	0	0	-1	-1	1	0	0	0	0	x6	0
7	0	0	-a7,3	0	0	0	1	0	0	0	x7	0
8	0	0	0	0	0	-a8,6	0	1	0	0	x8	0
9	0	0	0	0	0	0	-a9,7	0	1	0	x9	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-p10,8	p10,9	1	x10	0

Рис. 6.19. Матрична модель

Результати, отримані ПААВП:

- визначник системи:

$$\det(C) = 1$$

- повний коефіцієнт передачі:

$$k(10/1) = -a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{7,3} \cdot a_{9,7} \cdot a_{10,9} + a_{2,1} \cdot a_{5,2} \cdot a_{8,6} \cdot a_{10,8} + a_{4,1} \cdot a_{8,6} \cdot a_{10,8}$$

Для порівняння отриманих результатів проведено аналогічні розрахунки в MathCAD:

- визначник системи:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{52} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{73} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{86} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{97} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{108} & a_{109} & 1 \end{array} \right) \rightarrow 1$$

- повний коефіцієнт передачі:

$$\det_{10} := \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ -a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{52} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{73} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{86} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{97} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{108} & a_{109} & 0 \end{array} \right)$$

$$\det_1 := \left(\begin{array}{cccccccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{52} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{73} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{86} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{97} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{108} & a_{109} & 1 \end{array} \right)$$

$$k_{10,1} := \frac{|\det_{10}|}{|\det_1|}$$

$$k_{10,1} \text{ simplify } \rightarrow a_{41} \cdot a_{86} \cdot a_{108} + a_{21} \cdot a_{52} \cdot a_{86} \cdot a_{108} - a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{73} \cdot a_{97} \cdot a_{109}$$

7. МОДЕЛЮВАННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИБОРІВ НА ОСНОВІ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

7.1. Дослідження динаміки перетворювачів амплітудних значень змінної напруги

Перетворювач амплітудних значень змінної напруги, або амплітудний детектор (АД) є головним пристроєм амплітудних вольтметрів змінного струму. Перетворювачі мають невелику частотну похибку перетворення і тому працюють на частотах до декілька одиниць ГГц.

Схема амплітудного детектора в режимі великого сигналу є нелінійною, тому традиційні методи аналізу лінійних кіл використовувати не можна. Моделювання та аналіз динамічних процесів у нелінійних колах здійснюється на основі диференціальних рівнянь.

Відомо, що нелінійні диференціальні рівняння або системи з такими рівняннями, як правило, не мають аналітичних методів розв'язання. Тому застосовують чисельні методи, широкі можливості використання яких дає система комп'ютерної математики Mathcad [9].

Диференціальні рівняння, які описують динамічні процеси в нелінійних колах, мають більш широке застосування, ніж у лінійних колах, тому що вони використовуються не тільки для розрахунків перехідних процесів, а й для періодичних процесів також.

При аналізі нелінійних кіл у режимі малого сигналу характеристики нелінійних елементів лінеаризують у межах робочої точки, що призводить до розрахунку лінійного кола, в якому нелінійні елементи представлені їх диференціальними параметрами в робочій точці.

Математична модель діода в режимі великого сигналу [10]. Схему заміщення діода в режимі великого сигналу зображено на рис. 7.1.

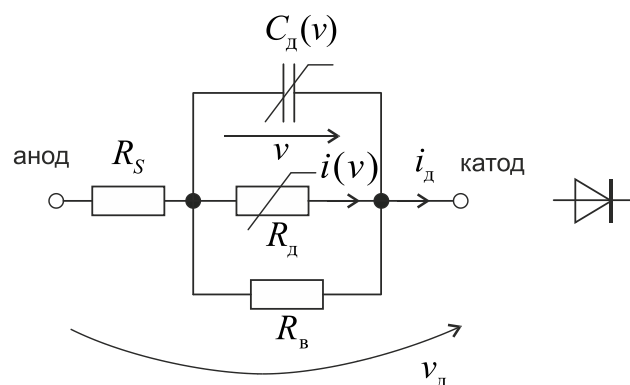


Рисунок 7.1 – Схема заміщення діода в режимі великого сигналу

Вона включає нелінійний опір $p-n$ переходу R_d , характеристика якого описується залежністю

$$i(v) = I_S (e^{\frac{v}{n\phi_T}} - 1), \quad (7.1)$$

нелінійну диференціальну ємність $p-n$ переходу C_d , опір витоку переходу R_v (RL) ≥ 1 МОм та об'ємний опір матеріалу напівпровідника в нейтральних зонах, що примикають до збідненого слою з обох сторін, і опір контактів R_s (RS). В дужках наводяться позначення відповідного параметра моделі діода в стандарті PSpice, який використовується в Micro-CAP, DesignLab [11, 12, 13, 14] та в інших системах схемотехнічного моделювання.

Ємність діода $C_d = C_d(v_d) = \Delta Q_d / \Delta v_d$ – визначається, як відношення зміни заряду, який накопичений у переході, до напруги, яка обумовлює цю зміну. Тобто ємність визначена, як диференціальна (чи динамічна), при цьому вона ще залежить від напруги v_d на $p-n$ переході (нелінійна).

Ємність діода має бар'єрну $C_{бар}$ і дифузійну $C_{диф}$ складові:

$$C_d = C_{бар} + C_{диф}. \quad (7.2)$$

Бар'єрна ємність $C_{бар}$ – ємність закритого $p-n$ переходу (працює, як звичайний конденсатор) і залежить від величини зворотної напруги. Бар'єрна ємність визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} C_{бар} = \frac{C_{60}}{(1 - v/\phi_K)^m}, & v \leq FC \cdot \phi_K; \\ C_{бар} = \frac{C_{60}}{(1 - FC)^{(1+m)}} \cdot [1 - FC \cdot (1 + m) + m \cdot \frac{v}{\phi_K}], & v > FC \cdot \phi_K, \end{cases} \quad (7.3)$$

де FC - коефіцієнт нелінійності бар'єрної ємності прямозмщеного переходу. Бар'єрна ємність має значення 1-20 пФ.

Пряме включення $p-n$ переходу додає до бар'єрної ємності ще дифузійну ємність $C_{диф}$ – ємність прямо зміщеного $p-n$ переходу, яка залежить від величини прямого струму та часу життя нерівноважних носіїв τ (ще називають час переносу заряду Transit Time).

$$C_{диф} = \frac{I_S \tau}{n \phi_T} \cdot e^{\frac{v}{n\phi_T}}. \quad (7.4)$$

Порядок $C_{диф}$ – десятки і сотні пФ.

Параметри, які входять до складу вище зображеної моделі мають наступний сенс: I_S (IS) – зворотний струм, або струм насичення (має велику залежність від температури, тому називають ще тепловим струмом);

φ_T (VT) – тепловий потенціал, $\varphi_T = kT/q$, де $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – абсолютна температура за Кельвіном $T \text{ } ^\circ\text{K} = 273 \text{ } ^\circ + T \text{ } ^\circ\text{C}$ (так при температурі $T = 27 \text{ } ^\circ\text{C} = 300 \text{ } ^\circ\text{K} \rightarrow \varphi_T = 25,8 \text{ мВ}$); $n = 1,0 \div 2,5$ (N) – поправочний коефіцієнт, що враховує відхилення характеристики діода від ідеальної моделі (коефіцієнт неідеальності); $C_{\text{б0}}$ (CJO) – бар’єрна ємність за нульового зміщення $p-n$ переходу, має значення декількох пФ; φ_k (VJ) – контактна різниця потенціалів (бар’єрний потенціал), яка $\varphi_k \approx 0,2 \div 0,4$ В для германієвих і $\varphi_k \approx 0,5 \div 0,8$ В для кремнієвих діодів; $m = 1/2 \div 1/3$ (M) – коефіцієнт плавності переходу; τ (TT) – час переносу заряду (Transit Time). Типові значення струму насичення I_S складають $10^{-2} \div 10^{-8}$ А – для германієвих і $10^{-6} \div 10^{-12}$ А – для кремнієвих діодів. Опір R_S малопотужних діодів, які працюють з невеликими за значеннями напругою і струмом, складає $\approx 0,1 \div 0,2$ Ом.

Опір $p-n$ переходу. Опір характеризує роботу діода на постійному і на змінному струмі. Оскільки вольт-амперна характеристика $p-n$ переходу є нелінійною функцією, то опір на постійному струмі R_0 буде відмінним від опору на змінному струмі R_d . Опір на змінному струмі називається диференціальним (чи динамічним). Якщо здиференціювати рівняння (7.1), то дістанемо значення *диференціального* опору в заданій точці вольт-амперної характеристики:

$$G_d(v) = R_d^{-1}(v) = \frac{di(v)}{dv} = \frac{I_S}{n \cdot \varphi_T} e^{\frac{v}{n \cdot \varphi_T}} \approx \frac{I_{\text{ПР}}}{n \cdot \varphi_T} \text{ або } R_d \approx \frac{n \cdot \varphi_T}{I_{\text{ПР}}} \text{ [Ом]}, \quad (7.5)$$

де G_d – *диференціальна* провідність $p-n$ переходу в заданій точці характеристики. Опір на постійному струмі R_0 визначається відношенням напруги до струму в заданій точці (v_0, i_0) вольт-амперної характеристики.

Нагадуємо, що наведена вище модель – це модель ідеального діода. Вона задовольняє багатьом задачам при аналізі електронних схем при невеликих за значенням струмах і напругах. Дійсні параметри моделі визначають *вимірюваннями* для конкретного діода.

Але модель не враховує деякі фізичні процеси, які мають місце у напівпровідникових структурах (генерації та рекомбінації носіїв заряду в приконтактній області, вплив заряду інжекттованих носіїв та електричного поля, створюваного цими зарядами, явище електричного пробую при зворотній напрузі тощо). Наприклад, явище електричного пробую є головним для деяких типів діодів (стабілітрони, тунельні діоди).

Далі наведемо аналіз амплітудного детектора в середовищі Mathcad.

Амплітудний детектор з відкритим входом. На рис. 7.2 наведено схему амплітудного детектора з відкритим входом. Розглянемо моделювання кола за допомогою диференціальних рівнянь [15].

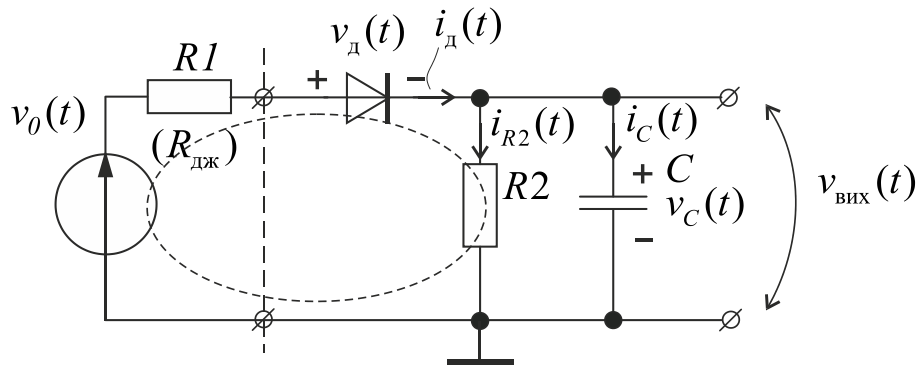


Рисунок 7.2 – Амплітудний детектор з відкритим входом

На низьких і середніх частотах ємністю $p-n$ переходу C_d можна знехтувати, і схема моделі діода стає резистивною. Впливом R_s і R_B поки також можна знехтувати. При цьому вважатимемо, що напруга на діоді $v_d(t)$ – це напруга $p-n$ переходу, а струм $i_d(t)$ – це струм $p-n$ переходу.

Розглянемо задачу детальніше. Для кола, зображеного на рис. 7.2, змінної стану є $v_C(t)$. Струм через ємнісний елемент C за першим законом Кірхгофа для вузла, який включає R_2 , C і нелінійний резистивний елемент, що має характеристику $i_d(v_d)$, дорівнює:

$$i_C(t) = i_d(v_d) - \frac{v_C(t)}{R_2}.$$

Тоді, враховуючи компонентне рівняння $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$, дістанемо:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_d(v_d) - \frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2}. \quad (7.4)$$

Але в рівнянні стану (7.4) напруга на діоді $v_d(t)$ є залишковою змінною, яку потрібно виразити через змінні стану і незалежних джерел.

Наступне незалежне рівняння одержимо за другим законом Кірхгофа для головного контуру:

$$v_d(t) = v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d(v_d). \quad (7.5)$$

Останнє рівняння однозначно визначає $v_d(t)$ через змінні $v_0(t)$, $v_C(t)$, але в неявному вигляді, що не дозволяє виключити цю змінну з правої частини рівняння (7.4), щоб звести систему до одного рівняння відносно змінної стану $v_C(t)$ і вхідної напруги $v_0(t)$.

Процедуру визначення струму $i_d[v_d(t)]$ через змінні $v_0(t)$, $v_C(t)$ можна реалізувати чисельно. Однак, якщо так робити, то при інтегруванні рів-

няння стану (7.4) процедуру чисельного розв'язку нелінійного рівняння (7.5) потрібно виконувати на кожному кроці інтегрування при розрахунках правої частини диференціального рівняння.

Отже, диференціальне рівняння, що описує коло, має вигляд:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{1}{C} \cdot i_d [v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d(v_d)],$$

де права частина не може бути виражена в явному вигляді через $v_C(t)$, $v_0(t)$, не може бути розв'язано з використанням стандартних засобів, що передбачені в Mathcad [9]. Тому потрібні деякі перетворення елементів схеми.

Але, якщо R_1 відсутній, то $v_d(t)$ можна визначити у явному вигляді $v_d(t) = v_0(t) - v_C(t)$. Тоді одержимо рівняння стану:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{1}{C} \cdot i_d [v_0(t) - v_C(t)],$$

яке матиме розв'язок з використанням стандартної процедури чисельного розв'язку звичайних диференціальних рівнянь `odesolve(x,b[,число кроків])`.

Перетворення характеристик нелінійних елементів при їх з'єднаннях. При аналізі нелінійних кіл досить часто потрібно перетворити ділянку кола з декількома елементами, серед яких можуть бути як лінійні, так і нелінійні елементи, в один елемент з еквівалентною характеристикою.

Досить часто виникає задача апроксимації нелінійних характеристик компонентів кола.

Так в схемі на рис. 7.2 є ділянка у вигляді послідовно включених резистор R_1 – діод, яку потрібно перетворити в один нелінійний елемент NE_{RD} з характеристикою типу $i(v_{NE})$. Якщо елементи включені послідовно, то залежність напруги від струму отримати легко. Так залежність $v_d(i_d)$ знайдемо з (7.1). Тоді напругу на NE_{RD} отримаємо додаванням:

$$v_{NE}(i_d) = \varphi_T \cdot \ln \left[\frac{i_d}{I_S} + 1 \right] + R_1 \cdot i_d. \quad (7.6)$$

Але для складання диференціального рівняння на основі рівняння для струмів за першим законом Кірхгофа потрібна зворотна характеристика $i(v_{NE})$, яку аналітично в явному вигляді за виразом (7.6) отримати не можна. Тому побудуємо її по точкам за виразом $v_{NE}(i)$: спочатку визначимо значення напруги v_i при заданому струмі i_i (рис. 7.3), потім за вузлові точки виберемо точки з координатами (i_i, v_i) та будуємо через ці точки функцію $i(v_{NE})$ з використанням певного виду інтерполяції (рис. 7.4). Графіки інтерполюючих функцій з нанесеними вузловими точками наведено на рис. 7.5.

Поліноміальна інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$n := \text{length}(y) - 1$ $n = 6$ - ступень полінома

$i := 0..n$ $j := 0..n$

Формування матриці XI :

$XI_{j,i} := (x_j)^i$ $XI_{j,0} := 1$ $a := XI^{-1} \cdot y$ - розрахунок коефіцієнтів поліному

$k := n..0$ $P(x) := \sum_k a_k \cdot x^k$ - визначення поліному

$V_{\max} := x_n$ $V_{\max} = 2.317$

$xi := -4, -3.999.. V_{\max} + 0.1$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.767 \times 10^{-5} \\ 3.914 \times 10^{-3} \\ 0.01 \\ -2.196 \times 10^{-3} \\ -6.923 \times 10^{-3} \\ 2.549 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Сплайнова інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$IS := \text{cspline}(x, y)$ $IS := \text{pspline}(x, y)$ $IS := \text{lspline}(x, y)$

$V := -4, -3.999.. V_{\max} + 0.1$ $SPL(V) := \text{interp}(IS, x, y, V)$

Кусково-лінійна інтерполяція характеристики струм-напруга нелінійного елемента резистор-діод:

$\text{fit}(s) := \text{linterp}(x, y, s)$

Рисунок 7.4 – Поліноміальна, сплайнова та кусково-лінійна інтерполяція складної нелінійності

Поліноміальна інтерполяція має певні недоліки. По-перше, поліном на границях різко розбігається. Але найголовніше, в межах ділянки вольт-амперної характеристики, де функція має злам або різкий перехід (від ділянки, де функція майже не змінюється, до ділянки, де швидко наростає), степеневий поліном дає значні коливання інтерполяційної кривої. Все це дає значні похибки при подальших обчисленнях *під час розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь*.

Кращі результати дає інтерполяція сплайнами. Але в межах робочої точки, де функція має злам або різкий перегин, вона також дає небажані коливання інтерполяційної кривої. Осциляції потім дають похибку моделювання динамічного режиму АД. Але *осциляції можна зменшити правильним вибором вузлових точок*.

Кусково-лінійна інтерполяція, як відомо, при заданій кількості вузлів дає більшу похибку наближення функції, але перевагою є те, що вона не дає небажаних осциляцій в межах ділянки, де вольт-амперна характеристика має різкий перегин. Тому в нашому випадку вона краща.

Графіки інтерполюючих функцій з нанесеними на нього вузловими точками

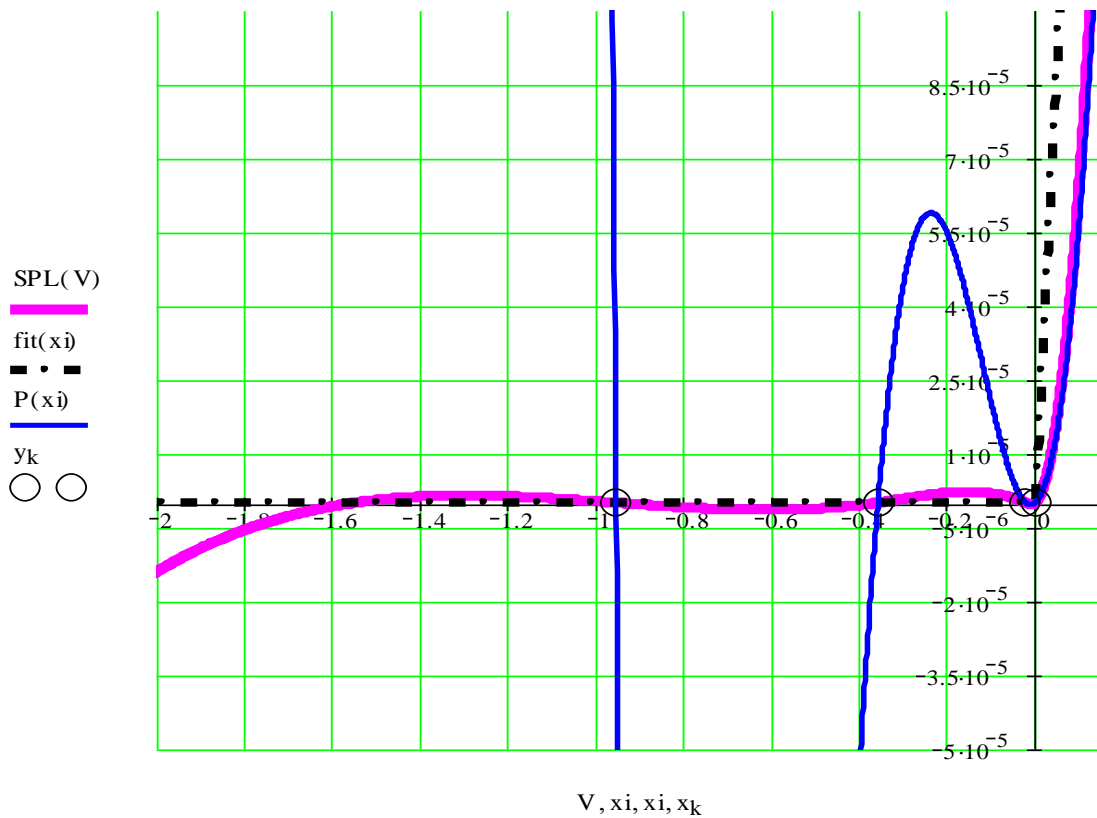
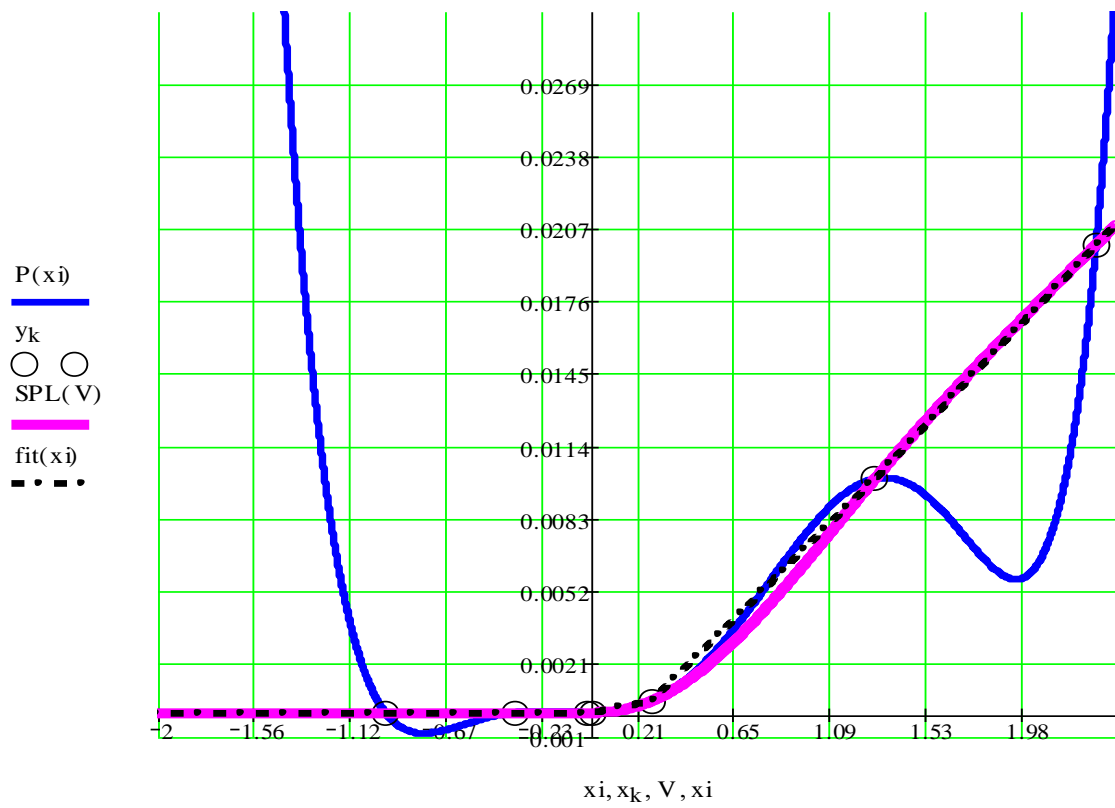


Рисунок 7.5 – Осциляції інтерполяційної кривої, якщо функція має злам або різкий перегин

$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц

$V_0 := 1$ - амплітуда, В

$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$T_1 := \frac{1}{f}$ $T_1 = 1 \times 10^{-3}$ - період, сек.

$T := 4 \cdot T_1$ - інтервал аналізу, сек

Given

Розв'язок

Диференціальне рівняння (нелінійне)
відносно напруги на ємності:

$$\frac{vc1(t)}{R2} + C \cdot \frac{d}{dt} vc1(t) = P(v_0(t) - vc1(t))$$

- поліноміальна інтерполяція

$$\frac{vc1(t)}{R2} + C \cdot \frac{d}{dt} vc1(t) = \text{interp}(IS, x, y, v_0(t) - vc1(t))$$

- інтерполяція сплайнами

$$\frac{vc1(t)}{R2} + C \cdot \frac{d}{dt} vc1(t) = \text{fit}(v_0(t) - vc1(t))$$

- кусково-лінійна інтерполяція

$vc1(0) = 0$ - початкові умови

$vc1 := \text{odesolve}(t, T, 1000)$ - розв'язок відносно напруги на ємності

$id(t) := P(v_0(t) - vc1(t))$ $id(t) := \text{interp}(IS, x, y, ((v_0(t) - vc1(t))))$

$id(t) := \text{fit}(v_0(t) - vc1(t))$ - струм через діод

$$vd(t) := 0.026 \ln\left(\frac{id(t)}{I_s} + 1\right)$$

$t := 0, 0.001 \cdot T .. T$

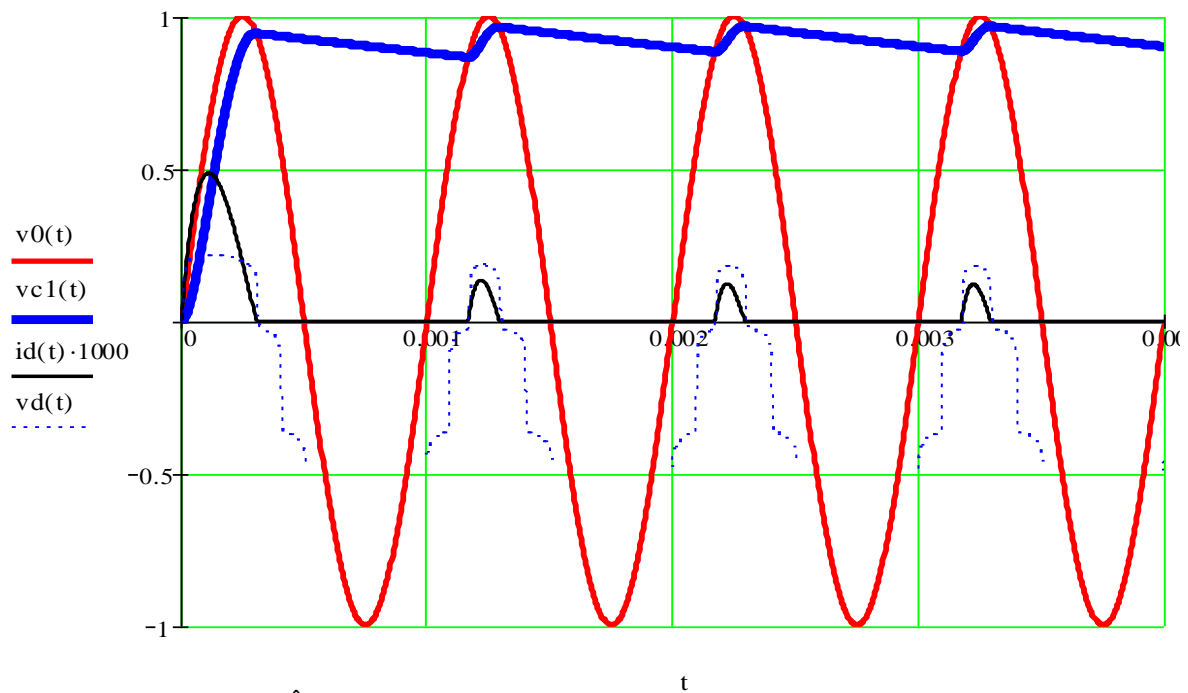


Рисунок 7.6 – Моделювання динамічних процесів в АД з використанням інтерполяції нелінійної характеристики:

$v_0(t)$ – вхідна напруга; $vc1(t)$ – вихідна напруга;
 $vd(t)$ – напруга на діоді; $id(t)$ – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Складання системи диференціальних рівнянь стану (точний метод). Складемо систему диференціальних рівнянь дещо по-іншому. Так струм через конденсатор C (рис. 7.1) та напруга на діоді дорівнюють:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2}, \quad v_d(t) = v_0(t) - v_C(t) - R_1 \cdot i_d[v_d(t)].$$

Здиференціюємо останнє рівняння та одержимо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{dv_C(t)}{dt} - R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt}.$$

Звідси дістанемо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right] - R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt},$$

$$\frac{dv_d(t)}{dt} \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \right] = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right].$$

Отже, отримуємо нормальну систему рівнянь першого порядку у формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \left[i_d[v_d(t)] - v_C(t)/R_2 \right]; \\ \frac{dv_d(t)}{dt} = \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} \right]^{-1} \cdot \left\{ \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{1}{C} \cdot \left[i_d[v_d(t)] - \frac{v_C(t)}{R_2} \right] \right\}; \end{cases} \begin{cases} v_C(0) = 0; \\ v_d(0) = 0, \end{cases}$$

де друга система задає початкові умови.

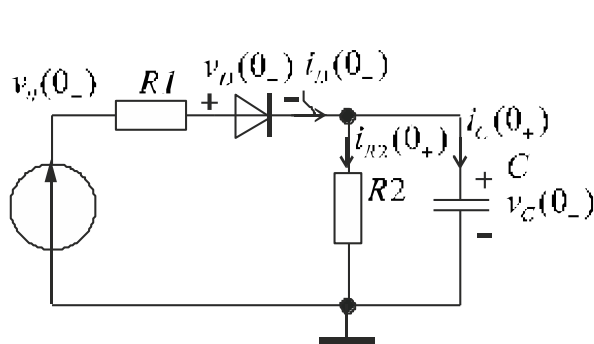
Розв'язок системи рівнянь потребує задання першої похідної від вхідної напруги $Difv_0(t) = \frac{dv_0(t)}{dt}$, а також $G_d(v_d) = \frac{di_d}{dv_d}$ – диференціальної (динамічної) провідності $p-n$ переходу в аналітичному вигляді. Все це можна знайти в символьному вигляді в середовищі Mathcad, якщо відомі аналітичні вирази $v_0(t)$ і $i_d(v_d)$.

Конденсатор C – це елемент, який накопичує енергію, тому напруга на конденсаторі, яка не може змінюватися миттєво (стрибком), при розрахунку електричних кіл має сенс змінної стану. Початкова напруга на конденсаторі дорівнює $v_C(0) = v_C(0_+) = v_C(0_-)$.

Напруга на діоді $v_d(t)$ не є змінної стану в прямому сенсі, але використання її похідної $\frac{dv_d(t)}{dt}$ дозволяє скласти систему диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші.

При цьому $v_d(0_+)$ відноситься до *залежних* початкових умов (якщо не брати до уваги ємність $p-n$ переходу), дорівнює $v_d(0_+) = v_0(0_+) - v_C(0_+) - R_1 \cdot i_d(v_d(0_+))$. Отже, $v_d(0_+)$ визначається (рис. 7.7) з розв'язку нелінійного рівняння. Але, якщо в момент часу $t = 0$ відбувається підключення до джерела напруги $v_0(t) = V_0 \sin(2\pi f t)$, яка дорівнює $v_0(0_+) = 0$, та ще $v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$, то струм у момент часу $t = 0_+$ через діод не тече. Вибираємо $v_d(0_+) = 0$ В.

■ Аналіз нелінійного діодного кола в момент часу $t = 0$



$$TOL := 10^{-6}$$

$$R1 := 1000 \quad \text{- вихідний опір джерела змінної напруги}$$

$$R2 := 100000 \quad C := 0.1 \times 10^{-6}$$

$$I_s := 1 \cdot 10^{-7}$$

$$I_d(v) := I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \quad \text{- вольт-амперна характеристика діода}$$

$$f := 1 \cdot 10^3 \quad \text{- частота, Гц} \quad V_0 := 1 \quad \text{- амплітуда, В}$$

$$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad \text{- вхідна напруга}$$

$$v_C := 0 \quad \text{- початкові умови для напруги на ємності}$$

Given

$$vd0 = v_0(0) - v_C - R1 \cdot I_d(vd0)$$

$$vd0 := \text{Find}(vd0) \text{ float}, 3 \rightarrow 0$$

$$vd0 = 0$$

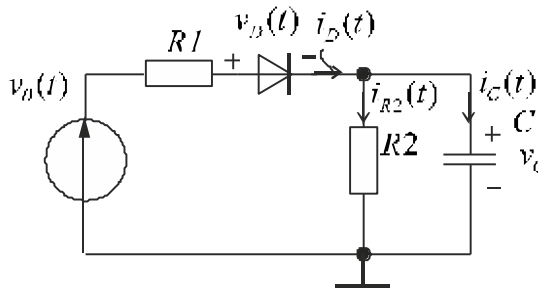
Рисунок 7.7 – Розрахунок початкових умов

Фрагменти документів Mathcad з прикладом аналізу реакції АД з відкритим входом на підключення до джерела синусоїдальної напруги наведено на рис. 7.8 і рис. 7.9.

Бачимо (наступний фрагмент на рис. 7.10), що використаний підхід дозволяє набагато точніше описати напругу на діоді при від'ємній полярності вхідного сигналу, а також, що головніше, точніше описати напругу та струм через діод на ділянці "відсікання".

Моделювання амплітудного детектора з відкритим входом
(з врахуванням вихідного опору джерела змінної напруги)

TOL := 10⁻⁸

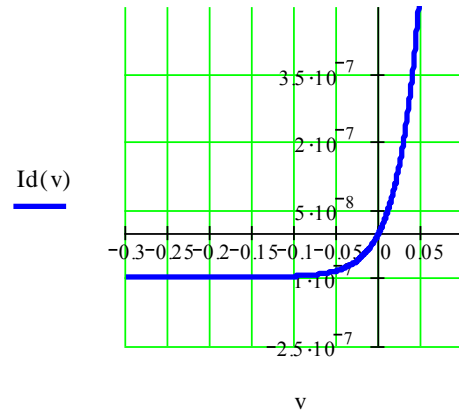
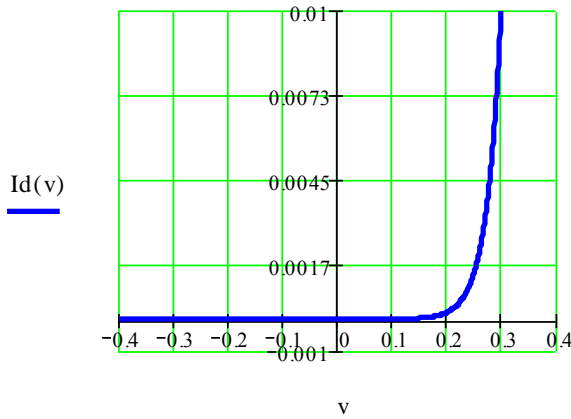


R1 := 1000 - вихідний опір джерела змінної напруги

R2 := 100000 C := 0.1 × 10⁻⁶

I_s := 1 · 10⁻⁷ φt := 0.026 n := 1

$I_d(v) := I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{n \cdot \phi t}\right) - 1 \right)$ - вольт-амперна характеристика діода



$G_d(v) := \frac{d}{dv} I_d(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.846210^6 \cdot \exp(38.462v)$

- диференціальна провідність діода

$R_{dd}(v) := \frac{1}{G_d(v)} \text{ float, 3} \rightarrow \frac{2.60 \cdot 10^5}{\exp(38.5 \cdot v)}$ - диференціальний опір діода

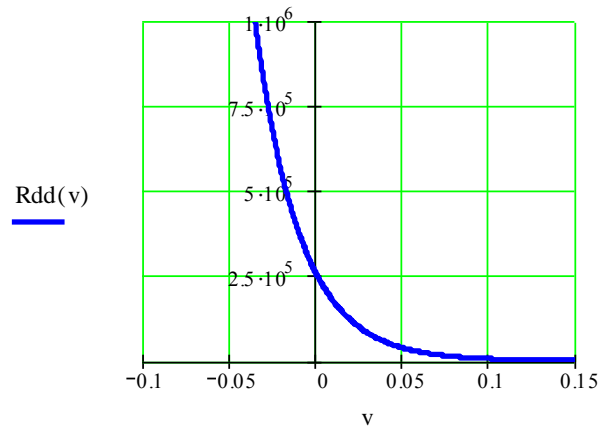
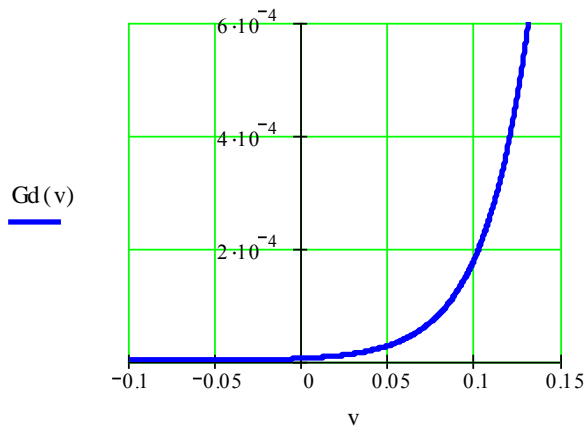


Рисунок 7.8 – Моделювання АД з відкритим входом

$$f := 1 \cdot 10^3 \quad \text{- частота, Гц} \quad V_0 := 1 \quad \text{- амплітуда, В} \quad T := \frac{1}{f} \quad T = 1 \times 10^{-3}$$

$$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad \text{- вхідна напруга} \quad \text{- період, сек.}$$

$$\text{Dif}V_0(t) := \frac{d}{dt} V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cdot \cos(2000 \cdot \pi \cdot t) \cdot \pi$$

Розв'язок

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов для змінних } V_C(t), V_D(t)$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot \text{Id}(x_1) - \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot x_0 \\ \frac{1}{1 + R_1 \cdot G_d(x_1)} \cdot \left[\text{Dif}V_0(t) - \left(\frac{1}{C} \cdot \text{Id}(x_1) - \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot x_0 \right) \right] \end{bmatrix} \quad \text{- символний вектор правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.01, 10000, D) \quad \text{- Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь}$$

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

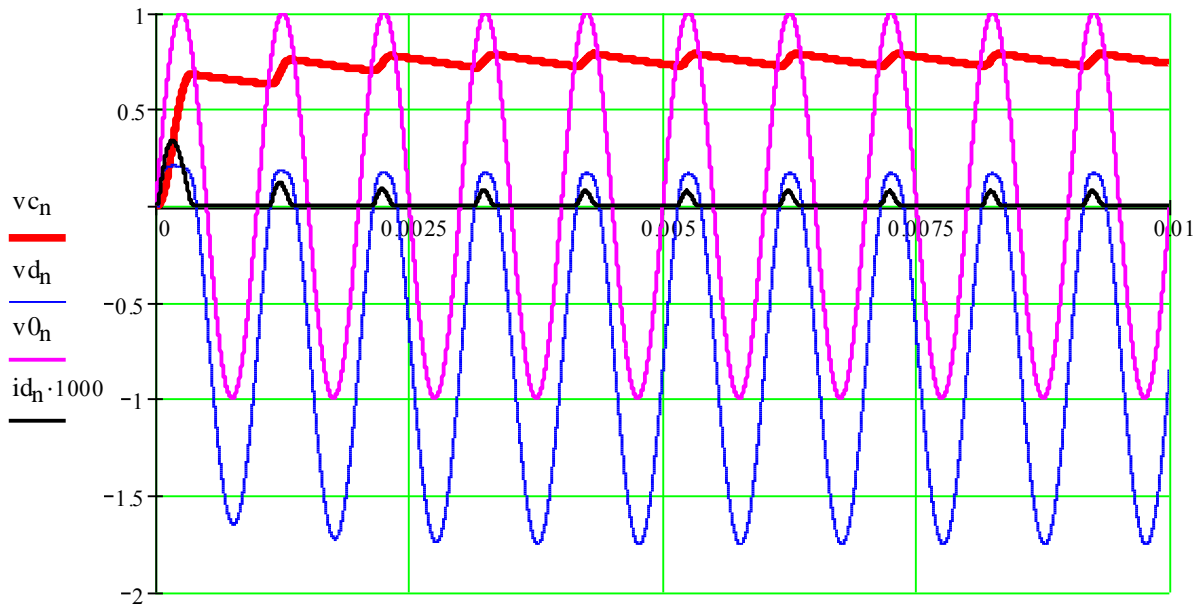
Рисунок 7.9 – Моделювання АД з відкритим входом (продовження)

У прикладі (рис. 7.9) використана стандартна функція чисельного розв'язку нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в формі Коші Rkadapt(x,t1,t2,n,D).

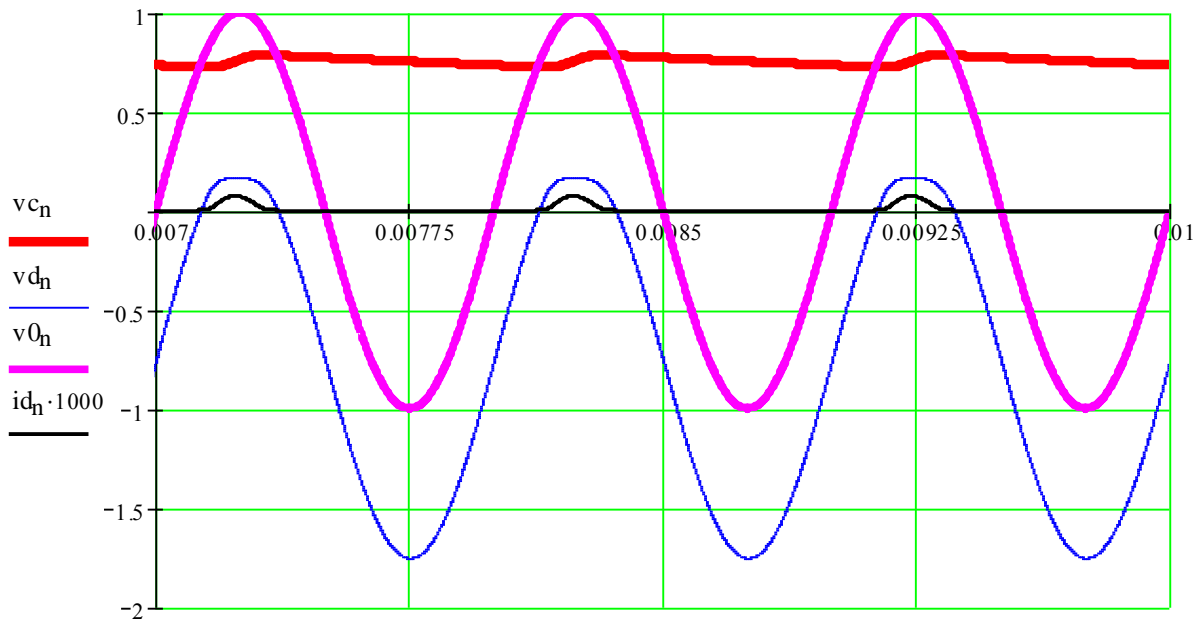
Функція Rkadapt(x,t1,t2,n,D) повертає матрицю розв'язків задачі Коші за методом Рунге-Кутта системи із звичайних диференціальних рівнянь, праві частини яких у вигляді перших похідних від шуканих функцій записані в символному векторі D з початковими умовами, які задані у векторі x, при розв'язку на інтервалі від t1 до t2 при кількості точок розв'язків n. Матриця розв'язків, що створюється, має ряд стовбців, кількість яких на 1 більша за кількість рівнянь. Перший стовбець – це значення аргументу розв'язків (тобто змінної часу t) на рівних інтервалах, другі стовбці – значення шуканих змінних.

Вектори розв'язків для змінних $V_C(t)$, $V_D(t)$:

$n := 0..9999$ $v_{c_n} := Z_{n,1}$ $v_{d_n} := Z_{n,2}$ $t_n := Z_{n,0}$ - час
 $v_{0_n} := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $i_{d_n} := Id(v_{d_n})$ - струм через діод



$Z_{n,0}$



$Z_{n,0}$
time, sec.

Рисунок 7.10 – Динамічні процеси в АД з відкритим входом при підключенні до джерела синусоїдальної напруги:

v_c - напруга на конденсаторі С; v_d – напруга на діоді;
 v_0 – вхідна напруга; i_d – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу. Проведемо аналіз амплітудного детектора з врахуванням R_d – нелінійного опору та C_d – нелінійної ємності $p-n$ переходу. Об’ємний опір матеріалу напівпровідника R_s можна включити до складу R_1 (внутрішній опір джерела напруги $R_{дж}$).

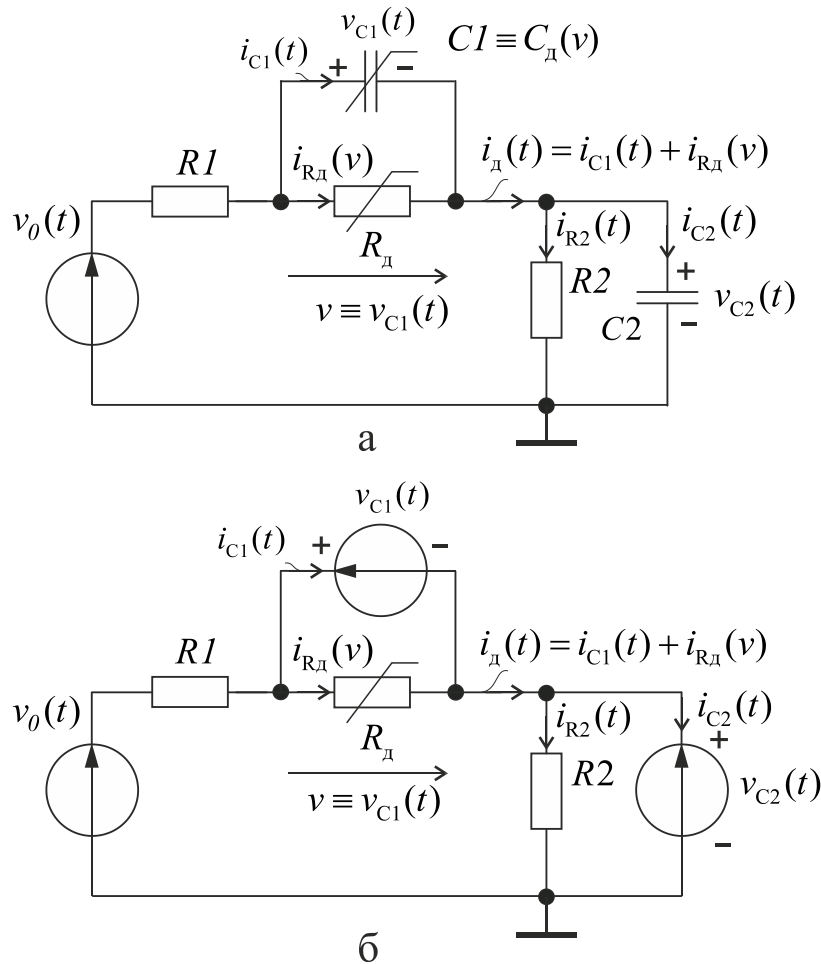


Рисунок 7.11 – Врахування нелінійної ємності $p-n$ переходу:

а – схема заміщення амплітудного детектора;

б – схема заміщення, складена за методом еквівалентних джерел

Згідно з теоремою компенсації замінимо ємнісні елементи кола (рис. 7.11,а) еквівалентними джерелами напруг. Одержимо еквівалентне резистивне коло (рис. 7.11,б), яке складається лише з лінійних та нелінійних резисторів, за заданих величин незалежних та залежних джерел. У такому колі треба виразити струми джерел, що замінюють ємнісні елементи, через напруги всіх джерел кола. Складемо рівняння для струмів:

$$i_{R1}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] = i_{C1}(t) + i_d[v_{C1}(t)];$$

$$i_{C2}(t) = i_{R1}(t) - i_{R2}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2}.$$

Звідси одержимо:

$$\begin{cases} i_{C1}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - i_d[v_{C1}(t)]; \\ i_{C2}(t) = \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2}. \end{cases}$$

Струм через конденсатор C_2 визначається звичайним компонентним рівнянням лінійного ємнісного елемента $i_{C2}(t) = C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$, де C_2 – параметр (ємність) конденсатора, яка є сталою величиною, не залежить від напруги на елементі: $Q(t) = C \cdot v(t)$, $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$.

Струм через ємність $p-n$ переходу визначається так:

$$i_{C1}(t) = \frac{dQ_{C1}}{dt} = \frac{dQ_{C1}}{dv_{C1}} \cdot \frac{dv_{C1}}{dt} = C_d(v_{C1}) \cdot \frac{dv_{C1}}{dt},$$

де Q_{C1} – заряд, накопичений у $p-n$ переході, який розглядаємо, як нелінійний конденсатор C_1 . Отже, $C_1(v_{C1}) = C_d(v_{C1}) = \frac{dQ_{C1}}{dv_{C1}}$ – це диференціальна (динамічна) ємність $p-n$ переходу, залежить від напруги v_{C1} на $p-n$ переході.

Зробивши заміну, одержимо систему рівнянь стану. Отже, нормальна система рівнянь стану першого порядку у формі Коші матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1(v_{C1})} \left\{ \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - i_d[v_{C1}(t)] \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left\{ \frac{1}{R_1} [v_0(t) - v_{C1}(t) - v_{C2}(t)] - \frac{v_{C2}(t)}{R_2} \right\}. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{C1}(0) = 0; \\ v_{C2}(0) = 0, \end{cases}$$

де $C_1(v_{C1}) = C_{бар} + C_{диф} = \frac{C_{60}}{(1 - v_{C1}/\phi_k)^m} + G_d(v_{C1}) \cdot \tau$ – нелінійна диференціальна ємність $p-n$ переходу (вважаємо, що для реальної схеми виконується режим $v_{C1} \leq FC \cdot \phi_k$); $G_d(v_{C1}) = \frac{I_s}{n\phi_T} \cdot e^{\frac{v_{C1}}{n\phi_T}}$ – диференціальна провідність діода; τ - час (Transit Time) переносу заряду.

Моделювання амплітудного детектора з відкритим входом (з врахуванням ємності $p-n$ переходу)

$$\begin{aligned}
 R1 &:= 1000 && \text{- вихідний опір джерела змінної напруги} && I_s &:= 1 \cdot 10^{-7} && m &:= 0.5 && n &:= 1 \\
 R2 &:= 100000 && C2 &:= 0.1 \times 10^{-6} && \phi_k &:= 0.4 && \phi_t &:= 0.026 \\
 &&& &&& FC &:= 0.5 && \text{- коефіцієнт не лінійності бар'єрної ємності прямозміщеного переходу} \\
 &&& &&& C0 &:= 10 \cdot 10^{-12} && \tau &:= 10 \cdot 10^{-12} \\
 Id(v) &:= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{\phi_t}\right) - 1 \right) && \text{- вольт-амперна характеристика діода}
 \end{aligned}$$

Ємність $p-n$ переходу :

бар'єрна ємність закритого переходу :

$$Cdb(v) := \begin{cases} \frac{C0}{\left(1 - \frac{v}{\phi_k}\right)^m} & \text{if } v \leq FC \cdot \phi_k \\ \left[\frac{C0}{(1 - FC)^{(1+m)} \cdot \left[1 - FC \cdot (1 + m) + m \cdot \frac{v}{\phi_k} \right]} \right] & \text{if } v > FC \cdot \phi_k \end{cases}$$

$$Gd(v) := \frac{I_s}{n \cdot \phi_t} \cdot \exp\left(\frac{v}{n \cdot \phi_t}\right) \quad \text{- диференціальна провідність діода} \quad Cdd(v) := Gd(v) \cdot \tau \quad \text{- дифузійна ємність}$$

Нелінійна диференціальна ємність діода : $Cd(v) := Cdb(v) + Cdd(v)$

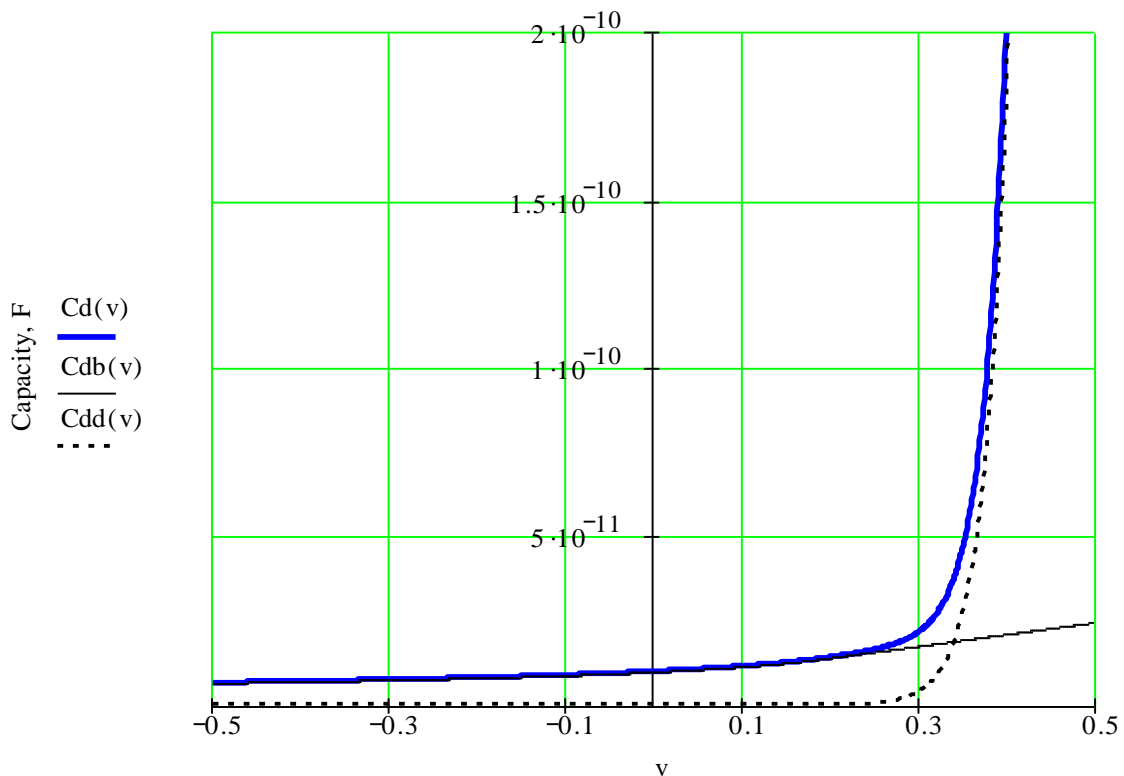


Рисунок 7.12 – Нелінійна диференціальна ємність $p-n$ переходу

$f := 1 \cdot 10^4$ - частота, Гц $V_0 := 1$ - амплітуда, В $v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов змінних $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{x_0}{\phi k}} + \frac{I_s \cdot \tau}{\phi t} \cdot \exp\left(\frac{x_0}{\phi t}\right)} \right)^{-1} \cdot \left[-I_d(x_0) + \frac{1}{R_1} \cdot (v_0(t) - x_0 - x_1) \right] \\ \frac{1}{C_2} \cdot \left[\frac{-x_1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \cdot (v_0(t) - x_0 - x_1) \right] \end{bmatrix}$$

$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.01, 100000, D)$

$n := 0..99999$ $vc1_n := Z_{n,1}$ $vc2_n := Z_{n,2}$ $t_n := Z_{n,0}$ - час $T := \frac{1}{f}$
 $v0_n := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vc1_n)$ - струм через діод

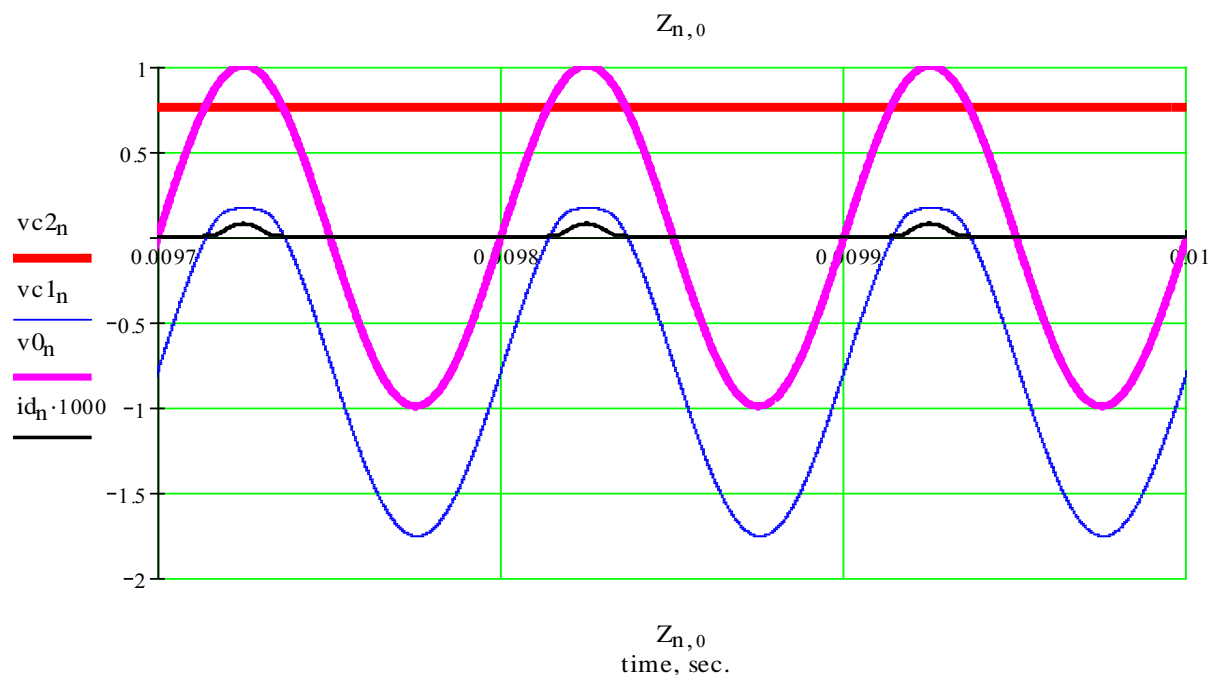
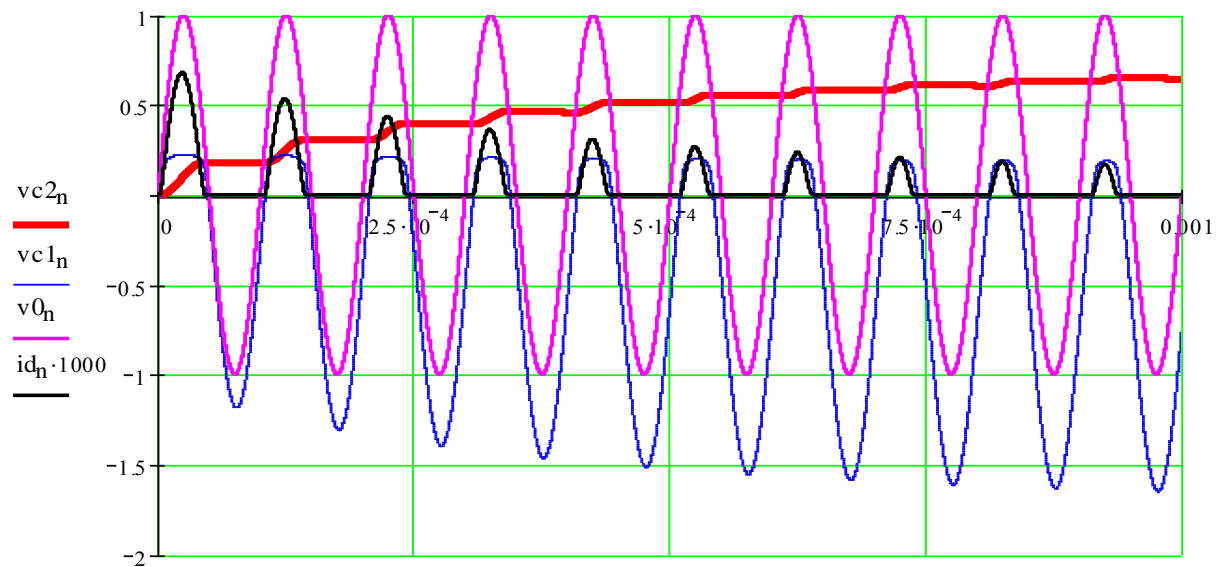


Рис. 7.13 – Динамічні процеси в АД з відкритим входом за умови врахування ємності р – n переходу

Амплітудний детектор із закритим входом. Дещо інакше відбуваються перехідні процеси в амплітудному детекторі з закритим входом (рис. 7.14).

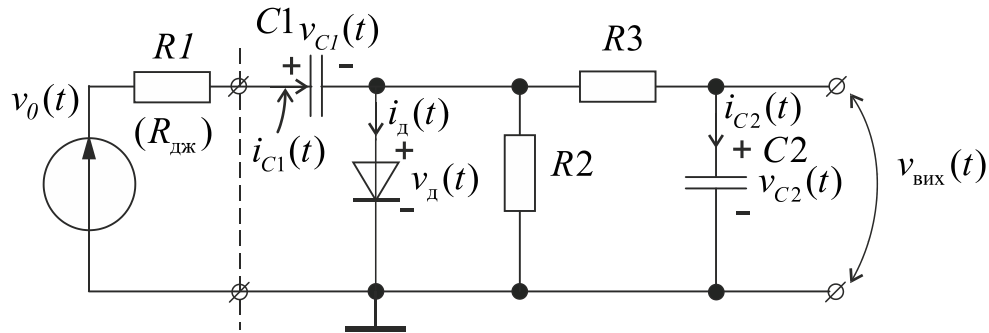


Рисунок 7.14 – Амплітудний детектор із закритим входом

Складемо систему диференціальних рівнянь нелінійного кола. Струм через ємність C_1 дорівнює:

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3}.$$

Струм через ємність C_2 дорівнює:

$$C_2 \cdot \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3}.$$

Напруга на діоді:

$$v_d(t) = v_0(t) - v_{C1}(t) - R_1 \cdot \left\{ i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3} \right\}.$$

Здиференціюємо останнє рівняння, одержимо:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{dv_{C1}(t)}{dt} - R_1 \cdot \left[\frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} - \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_{C2}(t)}{dt} \right]$$

Звідси дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{dv_d(t)}{dt} = & \frac{dv_0(t)}{dt} - \left\{ \frac{1}{C_1} i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2 C_1} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_1} \right\} - \\ & - R_1 \cdot \left\{ \frac{di_d}{dv_d} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dv_d(t)}{dt} - \frac{1}{R_3} \cdot \left[\frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

або

$$\frac{dv_d(t)}{dt} \cdot \left[1 + R_1 \cdot \frac{di_d}{dv_d} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right] = \frac{dv_0(t)}{dt} - \left\{ \frac{1}{C_1} i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2 C_1} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_1} \right\} + \frac{R_1}{R_3} \cdot \left[\frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_2} \right].$$

Отже, дістанемо систему рівнянь першого порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} \left\{ i_d[v_d(t)] + \frac{v_d(t)}{R_2} + \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3} \right\}; \\ \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_d(t) - v_{C2}(t)}{R_3 C_2}; \\ \frac{dv_d(t)}{dt} = A^{-1} \left\{ \frac{dv_0(t)}{dt} - \frac{i_d[v_d(t)]}{C_1} - \frac{v_d(t)}{R_2 C_1} + \left[\frac{R_1}{R_3^2 C_2} - \frac{1}{R_3 C_1} \right] [v_d(t) - v_{C2}(t)] \right\}, \\ A = \left[1 + R_1 \frac{di_d}{dv_d} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right], \end{array} \right.$$

для якої потрібно задати початкові умови, наприклад:

$$\begin{cases} v_{C1}(0) = 0; \\ v_{C2}(0) = 0; \\ v_d(0) = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, розрахунок системи рівнянь потребує задання похідної від вхідної напруги $Difv_0(t) = \frac{dv_0(t)}{dt}$, а також $G_d(v_d) = \frac{di_d}{dv_d}$ – диференціальної (динамічної) провідності діода.

Документ Mathcad з прикладом аналізу реакції амплітудного детектора з закритим входом на підключення до джерела синусоїдальної напруги наведено на рис. 7.15. На рис. 7.16 наведено результати моделювання.

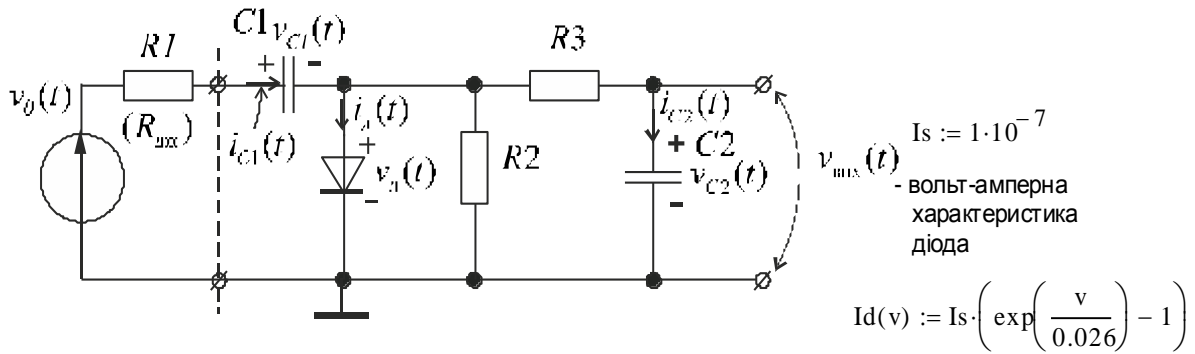
Також бачимо, що струм через діод тече лише протягом дуже малої частки кожного періоду. Вихідна напруга, що формується на конденсаторі C2, має від'ємну полярність.

Недоліком наведених вище схем амплітудних детекторів є значна нелінійність характеристики перетворення за вимірювання малих напруг.

Для лінеаризації характеристики в вольтметрах змінного струму широко використовується так звана схема Андерсона, яка реалізує метод взаємно-зворотних перетворень [16].

Моделювання амплітудного детектора із закритим входом
(з урахуванням вихідного опору джерела змінної напруги)

$$TOL := 10^{-6}$$



$R1 := 1000$ - вихідний опір джерела змінної напруги

$R2 := 1000000$ $R3 := 100000$ $C1 := 0.1 \times 10^{-6}$ $C2 := 0.1 \times 10^{-6}$

$Gd(v) := \frac{d}{dv} I_d(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.846210^{-6} \cdot \exp(38.462v)$ - диференціальна провідність діода

$f := 1 \cdot 10^3$ - частота, Гц $V0 := 1$ - амплітуда, В $T := \frac{1}{f}$ $T = 1 \times 10^{-3}$

$v0(t) := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ - вхідна напруга

$DifV0(t) := \frac{d}{dt} V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cos(2000\pi \cdot t) \cdot \pi$

Розв'язок

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов для змінних $V_{C1}(t)$, $V_{C2}(t)$, $V_D(t)$

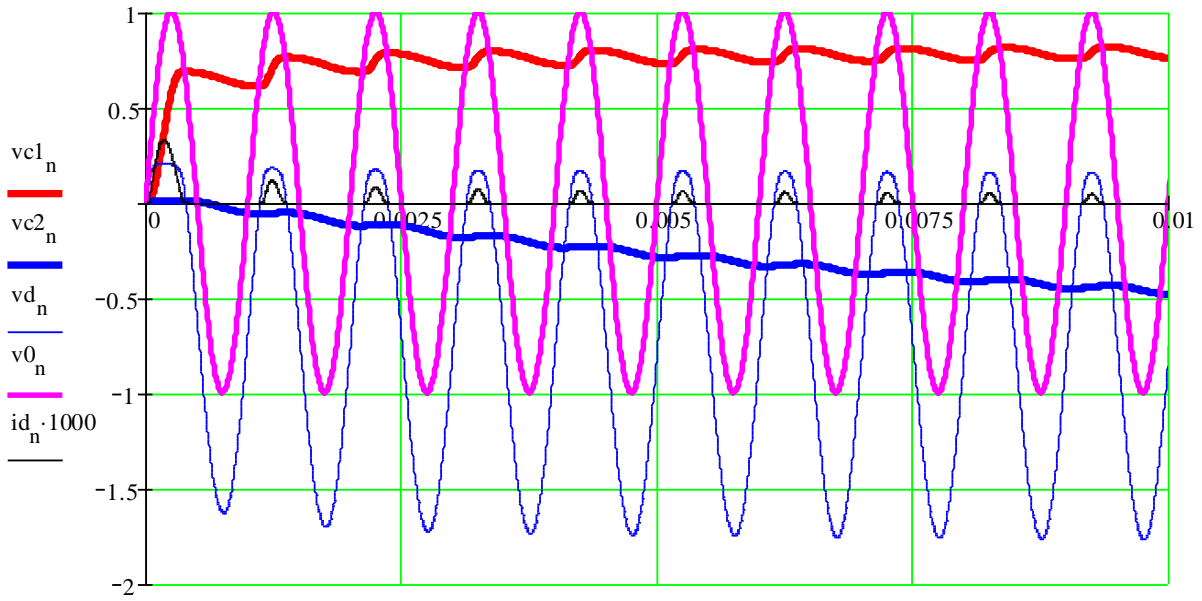
$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C1} \cdot \left[I_d(x_2) + \frac{x_2}{R2} + \frac{1}{R3} \cdot (x_2 - x_1) \right] \\ \frac{1}{R3 \cdot C2} \cdot (x_2 - x_1) \\ \frac{1}{\left(1 + R1 \cdot Gd(x_2) + \frac{R1}{R2} + \frac{R1}{R3} \right)} \cdot \left[DifV0(t) - \frac{1}{C1} \cdot I_d(x_2) - \frac{x_2}{R2 \cdot C1} + \left(\frac{R1}{R3^2 \cdot C2} - \frac{1}{R3 \cdot C1} \right) \cdot (x_2 - x_1) \right] \end{bmatrix}$$

$Z := Rkadapt(x, 0, 0.05, 10000, D)$ - Розв'язок системи *нелінійних* диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

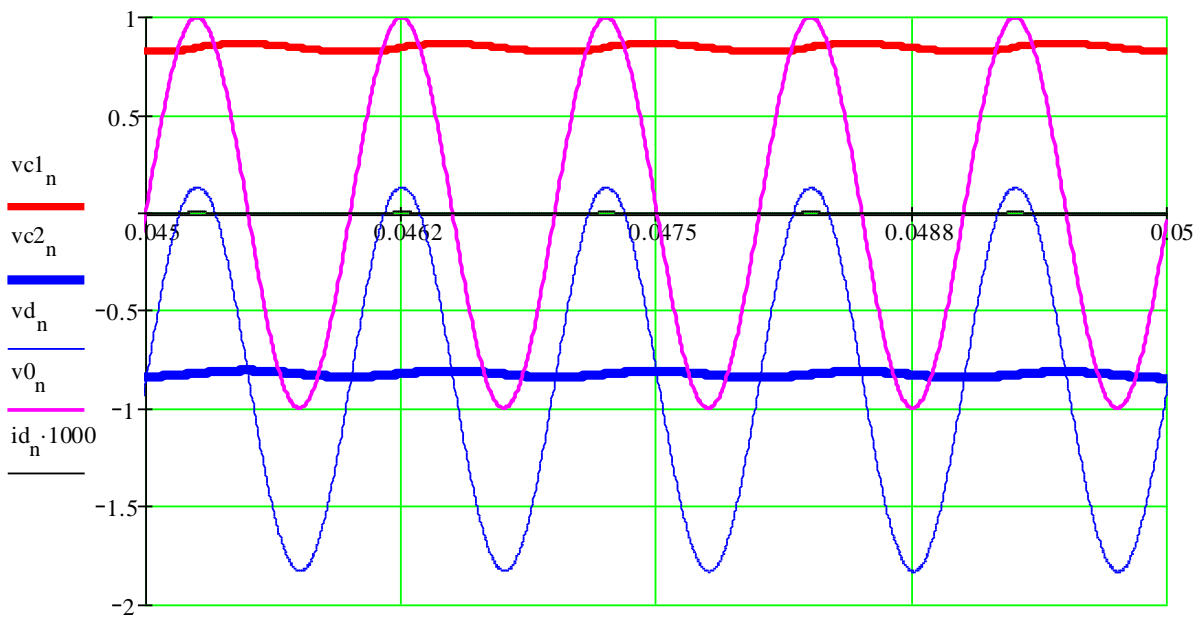
Рисунок 7.15 – Математична модель АД із закритим входом у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок

Вектори розв'язків для змінних $V_{C1}(t)$, $V_{C2}(t)$, $V_D(t)$:

$n := 0..9999$ $t_n := Z_{n,0}$ $vc1_n := Z_{n,1}$ $vc2_n := Z_{n,2}$ $vd_n := Z_{n,3}$
 $v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $id_n := Id(vd_n)$ - струм через діод



$Z_{n,0}$



$Z_{n,0}$
time, sec.

Рисунок 7.16 – Динамічні процеси в АД із закритим входом при підключенні до джерела синусоїдальної напруги:

*vc1 - напруга на C1; vc2 – напруга на C2; vd – напруга на діоді;
v0 – вхідна напруга; id – струм через діод (масштаб $\times 1000$)*

Метод взаємно-зворотних перетворень [16]. Такий перетворювач складається з передвключеного нелінійного перетворювача, суматора, підсилювача некомпенсації та ідентичного за параметрами іншого нелінійного перетворювача, включеного в коло зворотного зв'язку.

Схемна модель перетворювача амплітудних значень змінної напруги за структурою Андерсона наведена на рис. 7.17.

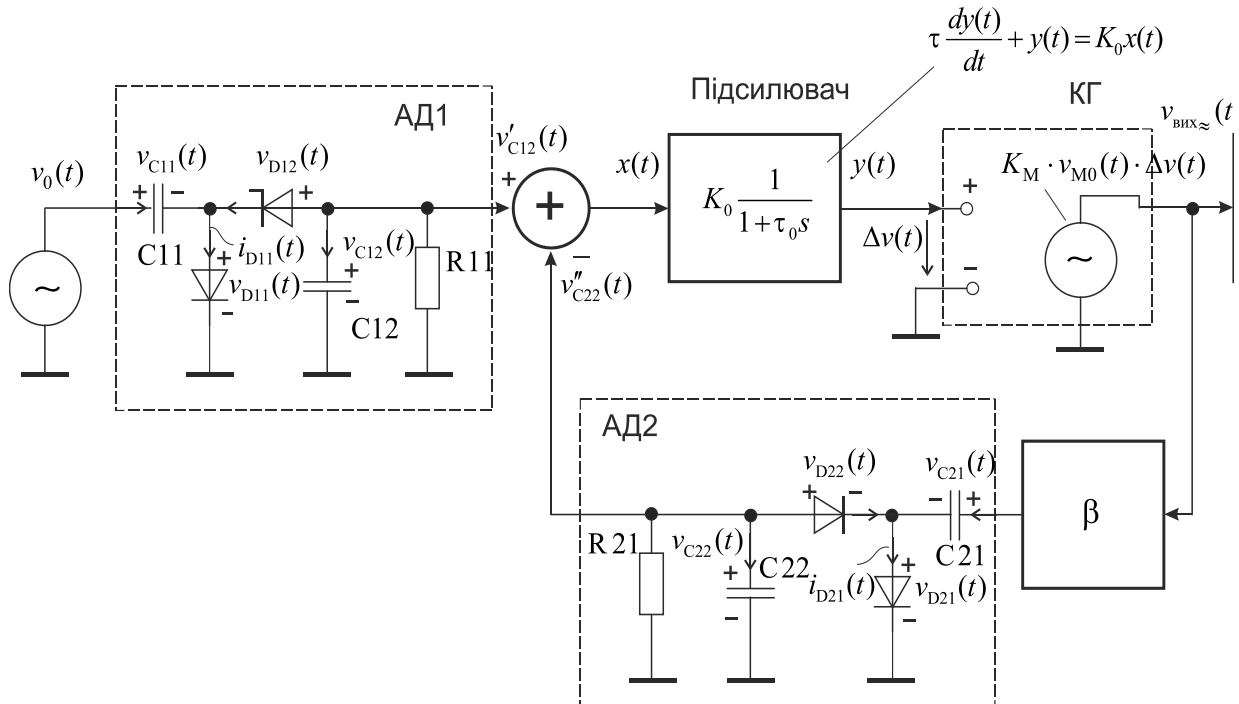


Рисунок 7.17 – Схемна модель перетворювача амплітудних значень змінної напруги за структурою Андерсона

Схема складається з передвключеного подвійного пікового детектора АД1, який має діоди $VD11, VD12$, конденсатори $C11, C12$, резистор $R11$, що враховує опір навантаження; підсилювача некомпенсації, модель якого має вигляд динамічної ланки першого порядку; КГ – генератора гармонічної напруги, керованого напругою; подільника напруги з коефіцієнтом $\beta < 1$; зворотного нелінійного перетворювача АД2, що також являє собою подвійний піковий детектор, і має діоди $VD21, VD22$, конденсатори $C21, C22$ та резистор $R21$, що враховує опір навантаження.

У промислових зразках вольтметрів змінної напруги вихідна напруга КГ має невелику фіксовану частоту, зазвичай 100 кГц. Вхідна напруга перетворювача має частотний діапазон до декілька одиниць ГГц.

При достатньо великому коефіцієнті петльового підсилення та за умови, що передатні характеристики детекторів АД1 і АД2 ідентичні, передатна характеристика перетворювача стає лінійною.

Вхідна напруга високої частоти перетворюється у низькочастотну напругу, яка за амплітудним значенням більше у $1/\beta$ разів. Потім ця напруга перетворюється у постійну напругу.

Перетворювач у постійну напругу може бути побудований за прецизійною схемою на базі операційних підсилювачів.

Завдяки взаємній компенсації похибок детекторів АД1 і АД2 межа вимірювання може бути знижена до 10 мВ.

$$C_{11} := 0.1 \times 10^{-6} \quad C_{12} := 0.1 \times 10^{-6} \quad C_{21} := 0.1 \times 10^{-6} \quad C_{22} := 0.1 \times 10^{-6}$$

$$R_{11} := 10000000 \quad R_{21} := 10000000$$

$$I_s := 1 \cdot 10^{-7}$$

$$I_{d1}(v) := I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \quad I_{d2}(v) := I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right)$$

$$K := 50000 \quad \tau := 200 \quad \beta := \frac{1}{10}$$

$$f_1 := 10 \cdot 10^3 \quad \text{- частота, Гц} \quad V_0 := 0.3$$

$$f_2 := 0.5 \cdot 10^3 \quad T_A := 0.25 \quad N := 100000$$

$$v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \quad \text{- вхідна напруга} \quad v_M(t) := 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) \quad \text{- напруга модулятора}$$

Рисунок 7.18 – Параметри схемної моделі перетворювача за структурою Андерсона (амплітуда вхідної напруги 0,3В)

Математична модель перетворювача у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші для змінних стану $v_{C11}(t)$, $v_{C12}(t)$, $v_{C21}(t)$, $v_{C22}(t)$, $v_Y(t)$ (де $v_Y(t)$ - вихідна напруга підсилювача) наведена на рис. 7.19.

Динамічні процеси в АД1 наведено на рис. 7.20.

Динамічні процеси в АД2 та встановлення вихідної напруги перетворювача за схемою Андерсона н наведено на рис. 7.21.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов змінних стану}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C11} \cdot (\text{Id1}(v0(t) - x_0) - \text{Id2}(x_0 + x_1 - v0(t))) \\ \frac{1}{C12} \cdot \left(-\text{Id2}(x_0 + x_1 - v0(t)) - \frac{x_1}{R11} \right) \\ \frac{1}{C21} \cdot [\text{Id1}(K \cdot vM(t) \cdot x_4 \cdot \beta - x_2) - \text{Id2}[-(K \cdot vM(t) \cdot x_4) \cdot \beta + x_2 + x_3]] \\ \frac{1}{C22} \cdot \left[-\text{Id2}[-(K \cdot vM(t) \cdot x_4) \cdot \beta + x_2 + x_3] - \frac{x_3}{R21} \right] \\ \frac{1}{\tau} \cdot (x_1 - x_3 - x_4) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, TA, N, D)$$

Вектори розв'язків для змінних стану:

$$n := 0..N-1 \quad t_n := Z_{n,0} \quad vc11_n := Z_{n,1} \quad vc12_n := Z_{n,2} \quad vc21_n := Z_{n,3} \quad vc22_n := Z_{n,4}$$

$$v0_n := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t_n) \quad id11_n := \text{Id1}(v0_n - vc11_n) \quad vd11_n := v0_n - vc11_n$$

$$vOut_n := K \cdot (Z_{n,5}) \cdot 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t_n) \quad id21_n := \text{Id1}(vOut_n \cdot \beta - vc21_n)$$

$$vd21_n := vOut_n \cdot \beta - vc21_n$$

Рисунок 7.19 – Математична модель перетворювача за структурою Андерсона у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь

Динамічні процеси в АД1

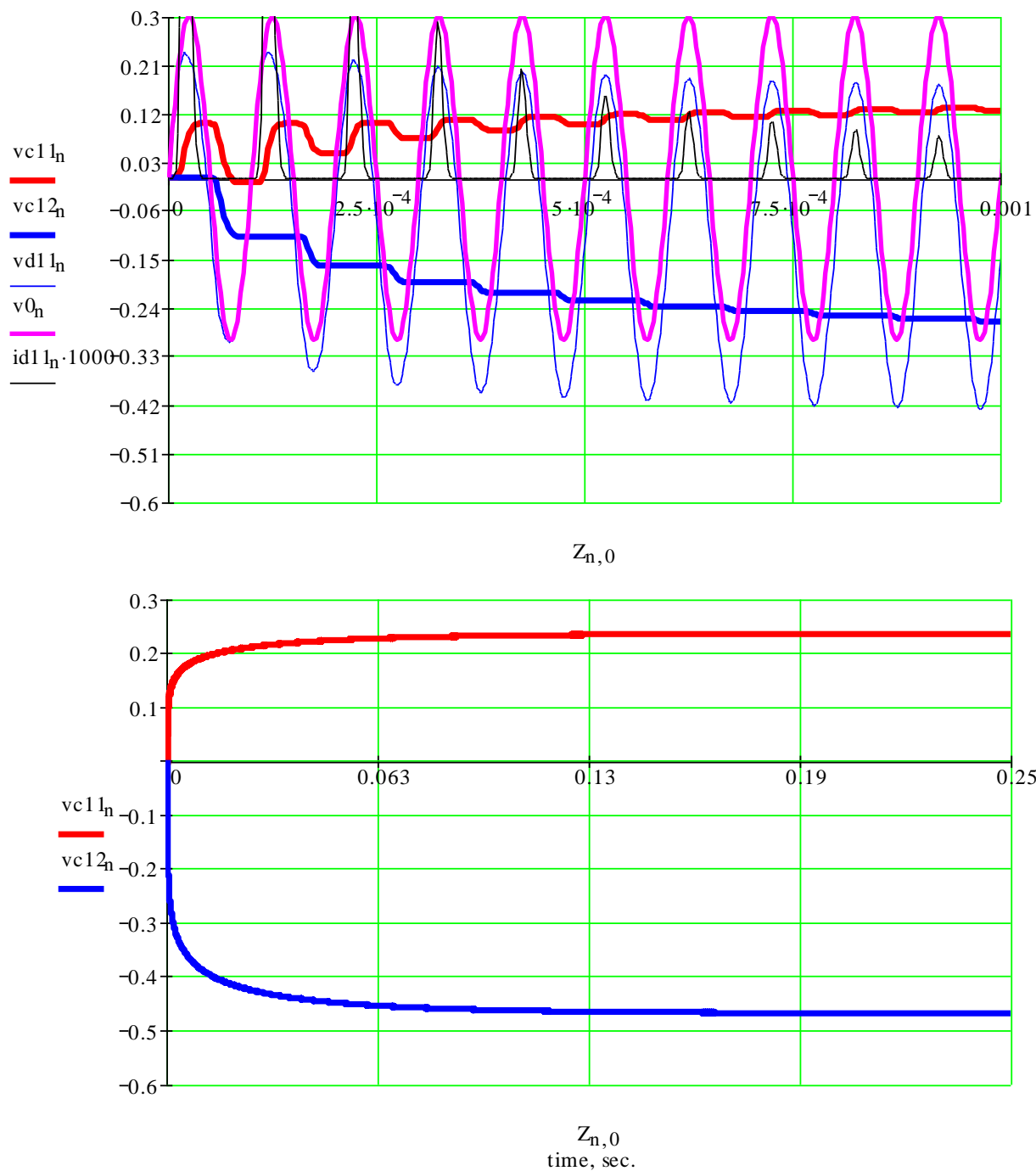


Рисунок 7.20 – Динамічні процеси в АД1 (амплітуда вхідної напруги 0,3В)

Динамічні процеси в АД2 та встановлення вихідної напруги перетворювача

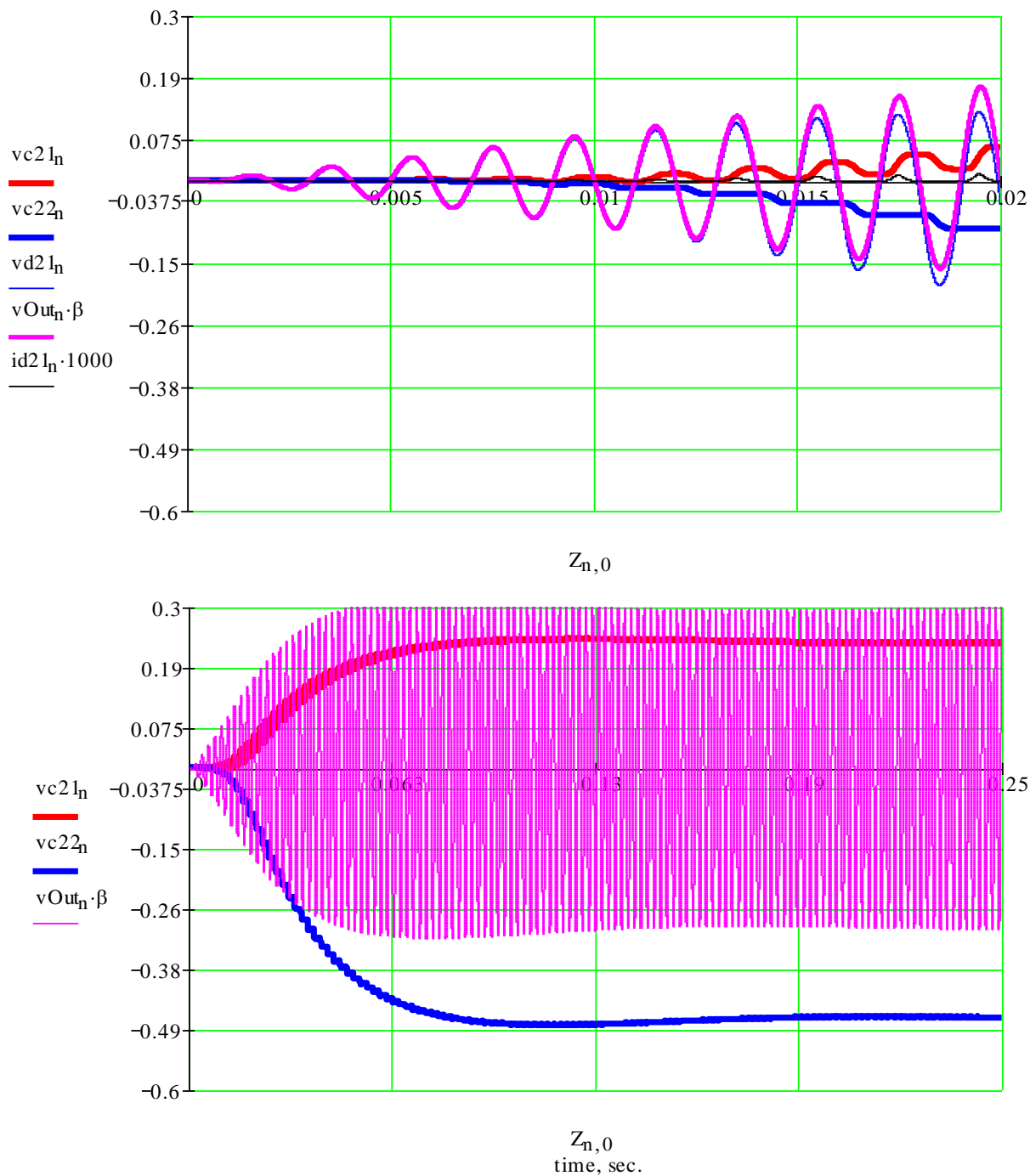


Рисунок 7.21 – Динамічні процеси в АД2 (амплітуда вхідної напруги 0,3В)

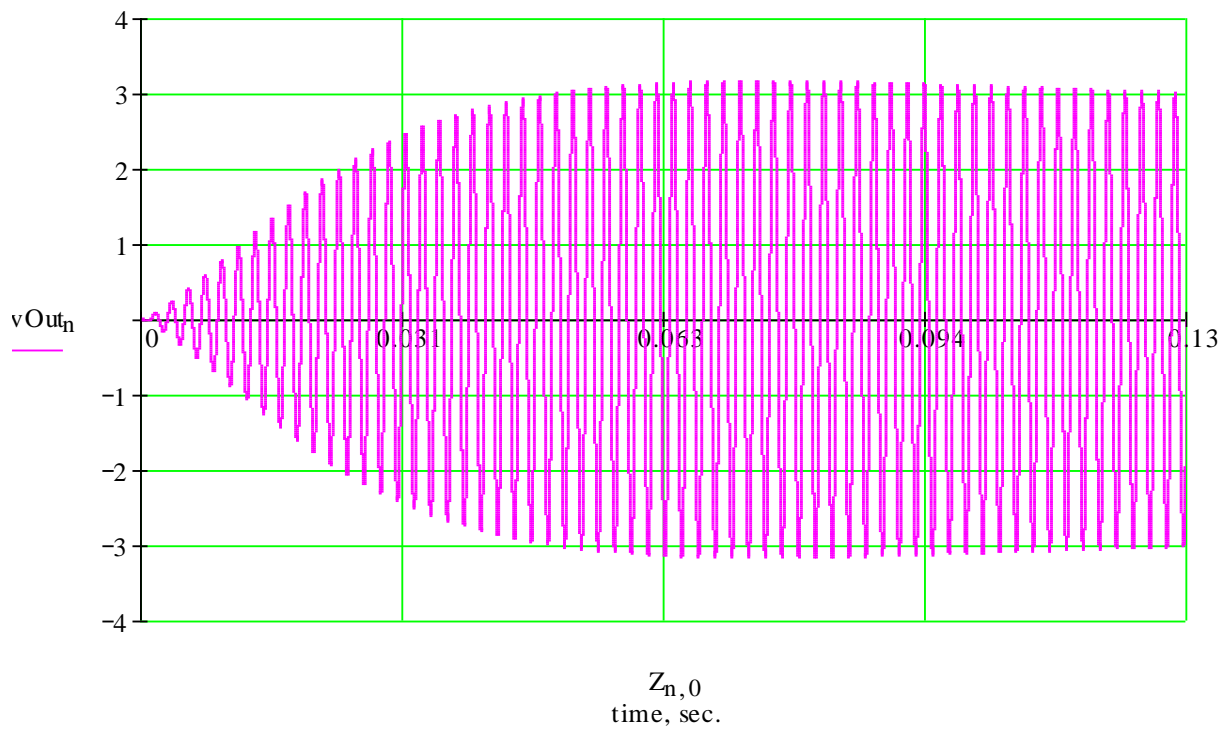


Рисунок 7.22 – Вихідна змінна напруга перетворювача $v_{Out}(t)$ низької частоти f_2 (амплітуда вихідної напруги складає 3В)

Порівняння вхідної та вихідної напруг перетворювача в усталеному режим

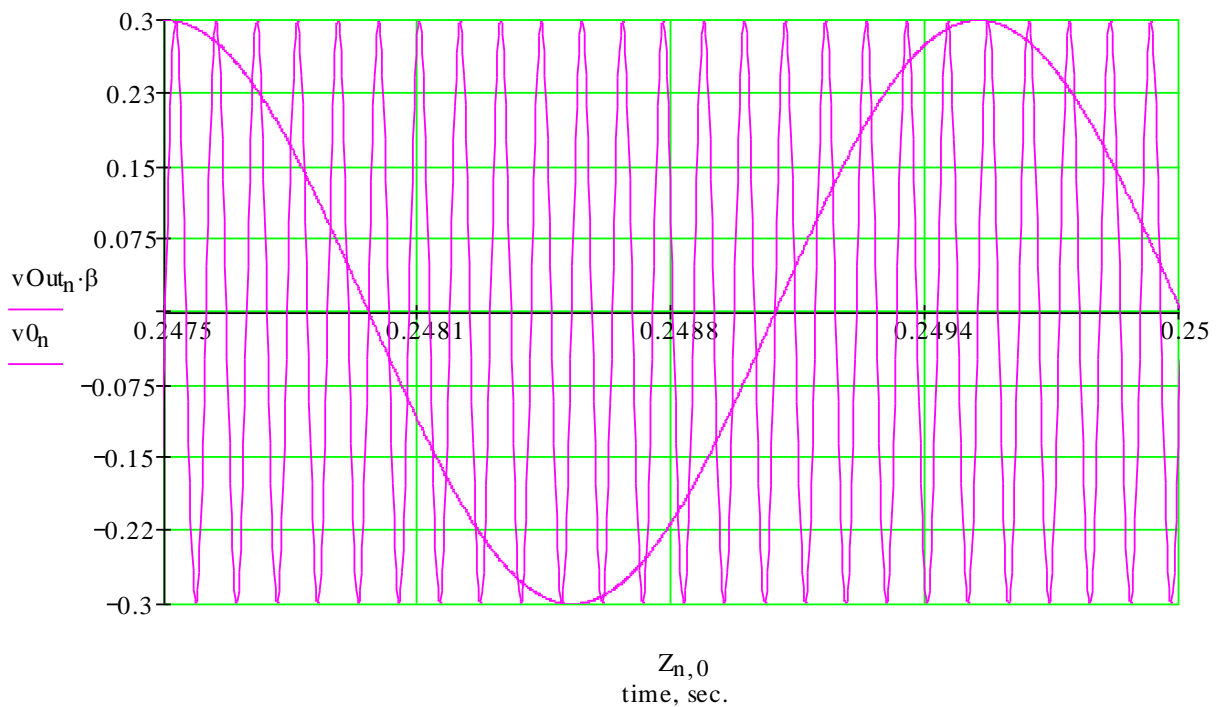


Рисунок 7.23 – Порівняння вхідної напруги $v_0(t)$ високої частоти f_1 та напруги зворотного зв'язку $v_{Out}(t)\beta$ (низька частота f_2) в усталеному режимі

Моделювання АД на операційному підсилювачі. На рис. 7.24 наведено схему амплітудного детектора на операційному підсилювачі, коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком (схема – "ідеальний діод").

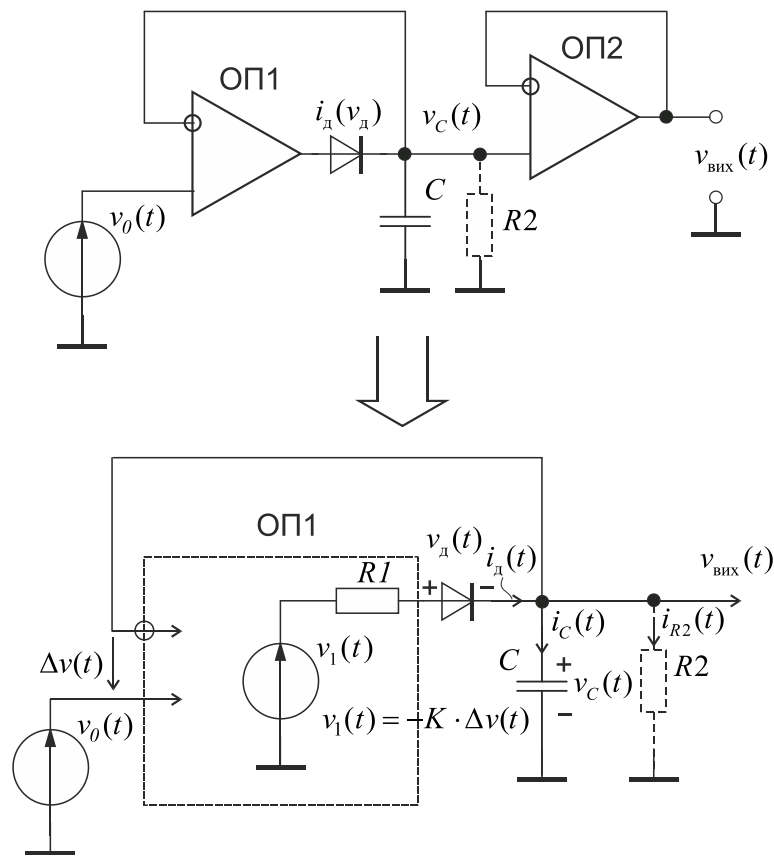


Рисунок 7.24 – АД на операційному підсилювачі (схема – "ідеальний діод")

Документ Mathcad з аналізом, коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком, наведено на рис. 7.25. Математична модель АД за схемою "ідеальний діод" надана у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Під час аналізу використано модель амплітудної характеристики операційного підсилювача у вигляді нелінійності на зразок насичення.

На рис. 7.26 дано результати моделювання. Бачимо, що вихідна напруга АД практично не залежить від падіння напруги на відкритому діоді.

$$R1 := 1000 \text{ - вихідний опір операційного підсилювача} \quad R2 := 100000 \quad C := 0.1 \times 10^{-6} \quad Is := 1 \cdot 10^{-7}$$

$$Id(v) := Is \cdot \left(\exp\left(\frac{v}{0.026}\right) - 1 \right) \quad Gd(v) := \frac{d}{dv} Id(v) \text{ float, 5} \rightarrow 3.8462 \cdot 10^{-6} \cdot \exp(38.462 \cdot v)$$

- диференціальна провідність діода

$$K0 := 10 \quad a := 100$$

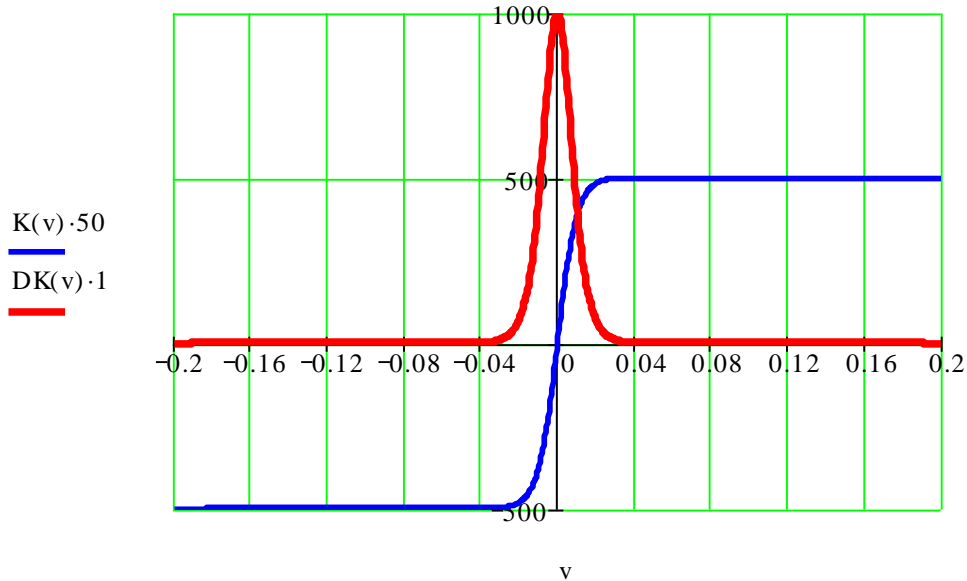
Модель операційного підсилювача

$$K(v) := K0 \cdot \tanh(v \cdot a)$$

- модель амплітудної характеристики операційного підсилювача, яка має вигляд нелінійності на зразок насичення.

$$DK(v) := \frac{d}{dv} K(v) \text{ float, 3} \rightarrow 1.00 \cdot 10^3 - 1.00 \cdot 10^3 \cdot \tanh(100 \cdot v)^2$$

- динамічний коефіцієнт підсилення



$$f := 1 \cdot 10^3 \text{ - частота, Гц} \quad V0 := 1 \text{ - амплітуда, В}$$

$$v0(t) := V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \text{ - вхідна напруга}$$

$$T := \frac{1}{f} \quad T = 1 \times 10^{-3} \text{ - період, сек.}$$

$$DV0(t) := \frac{d}{dt} V0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \rightarrow 2000 \cdot \cos(2000 \cdot \pi \cdot t) \cdot \pi$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - вектор початкових умов для змінних } V_C(t), V_D(t)$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot Id(x_1) - \frac{1}{R2 \cdot C} \cdot x_0 \\ \frac{1}{1 + R1 \cdot Gd(x_1)} \cdot \left[DK(x_0 - v0(t)) \cdot DV0(t) - \frac{DK(x_0 - v0(t)) + 1}{C} \cdot \left(Id(x_1) - \frac{1}{R2} \cdot x_0 \right) \right] \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.01, 100000, D) \text{ - Розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь}$$

Рисунок 7.25 – Математична модель АД у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок:

$K(v)$ – нелінійна амплітудна характеристика підсилювача (масштаб $\times 50$);
 $DK(v)$ – динамічний коефіцієнт підсилення як похідна від $K(v)$

$n := 0..99999$ $v_{c_n} := Z_{n,1}$ $v_{d_n} := Z_{n,2}$ $t_n := Z_{n,0}$ - час
 $v_{0_n} := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$ - вхідна напруга $i_{d_n} := Id(v_{d_n})$ - струм через діод

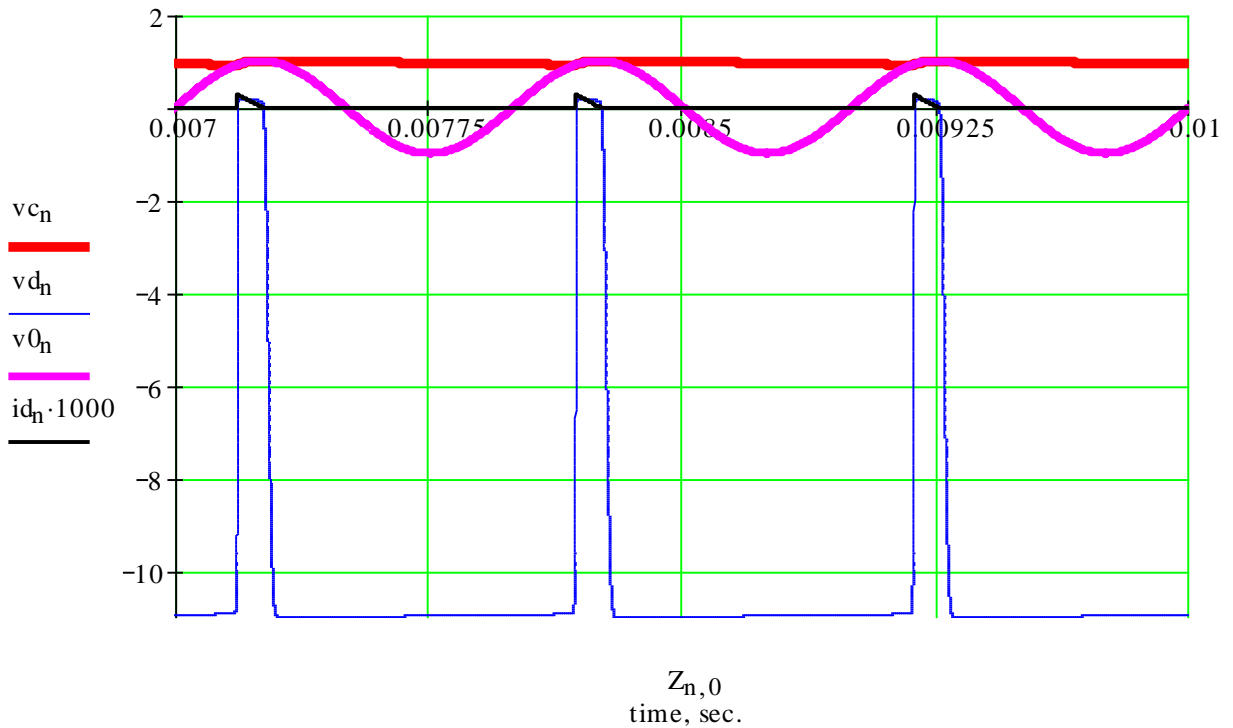
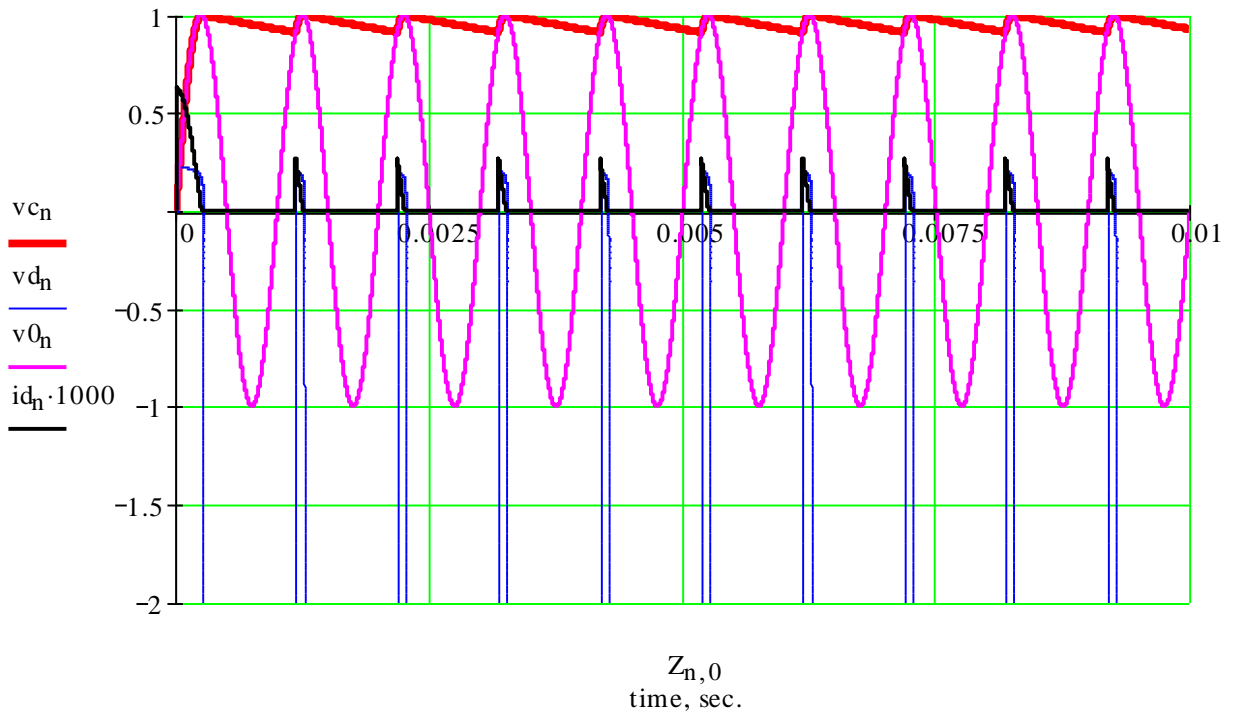


Рисунок 7.26 – Моделювання АД (схема – "ідеальний діод"), коли діод охоплено від'ємним зворотним зв'язком:

v_c - напруга на конденсаторі С; v_d – напруга на діоді; v_0 – вхідна напруга;
 i_d – струм через діод (масштаб $\times 1000$)

7.2. Дослідження динаміки лінійного перетворювача середньоквадратичних значень змінної напруги

Середньоквадратичне значення (СКЗ) змінної напруги дорівнює

$$v_{\text{скз}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_x^2(t) dt},$$

де T – час вимірювань або період сигналу. Для реалізації вимірювань у вольтметрах використовуються перетворювачі змінної напруги у постійну напругу за СКЗ, яка потім вимірюється. Такі перетворювачі є нелінійними колами та обов'язково у своєму складі мають інерційні елементи.

Середньоквадратичне (ефективне, діюче) значення змінної напруги дорівнює постійній напрузі при тій самій потужності, що виділяється на тому самому навантаженні. Становить особливий інтерес при вимірюванні шумів і сигналів з широким спектром.

У широкосмугових вольтметрах для реалізації прецизійних вимірювань застосовують термоелектричні перетворювачі (ТП). Найпоширеніші – вакуумні, плівкові та напівпровідникові ТП з нагрівальним елементом у вигляді резистора й різними давачами температури: термопарою, напівпровідниковим діодом, транзистором; диференціальні багатоелементні ТП типу ДТПС тощо. Нагрівальний елемент і давач температури мають тепловий зв'язок, тому в ТП вихідна напруга постійного струму залежить від потужності вхідної напруги змінного струму.

Розглянемо термоперетворювачі типу ТВБ (термоперетворювач вакуумний безконтактний). Технічні характеристики ТВБ-4: номінальний вхідний струм нагрівального елемента – 10 мА; допустиме значення вхідного струму – 15 мА; номінальне значення термоелектрорушійної сили (термоЕРС) – $E_{\text{ЕРС}} = 12 \div 16$ мВ; опір нагрівального елемента (нагрівника) – $r_{\text{н}} = 40 \div 60$ Ом; вихідний опір термопари – $r_{\text{вих}} = 15 \div 20$ Ом; стала часу, що характеризує інерційні властивості ТВБ-4, приблизно дорівнює $\tau = 1 \div 1,5$ с.

Переваги таких перетворювачів наступні: мала частотна похибка в діапазоні частот до десятків та сотень мегагерц, висока квадратичність характеристики, незалежність похибки від форми кривої вхідної напруги.

Але при звичайному включенні таких ТП в схемі вольтметрів шкала матиме квадратичний характер. Тому використовують диференціальне включення ТП, що реалізує метод взаємно-зворотних перетворень.

Метод взаємно-зворотних перетворень [16]. Схему лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги (ЛПСКЗН), побудовану за методом взаємно-зворотних перетворень, наведено на рис. 7.27.

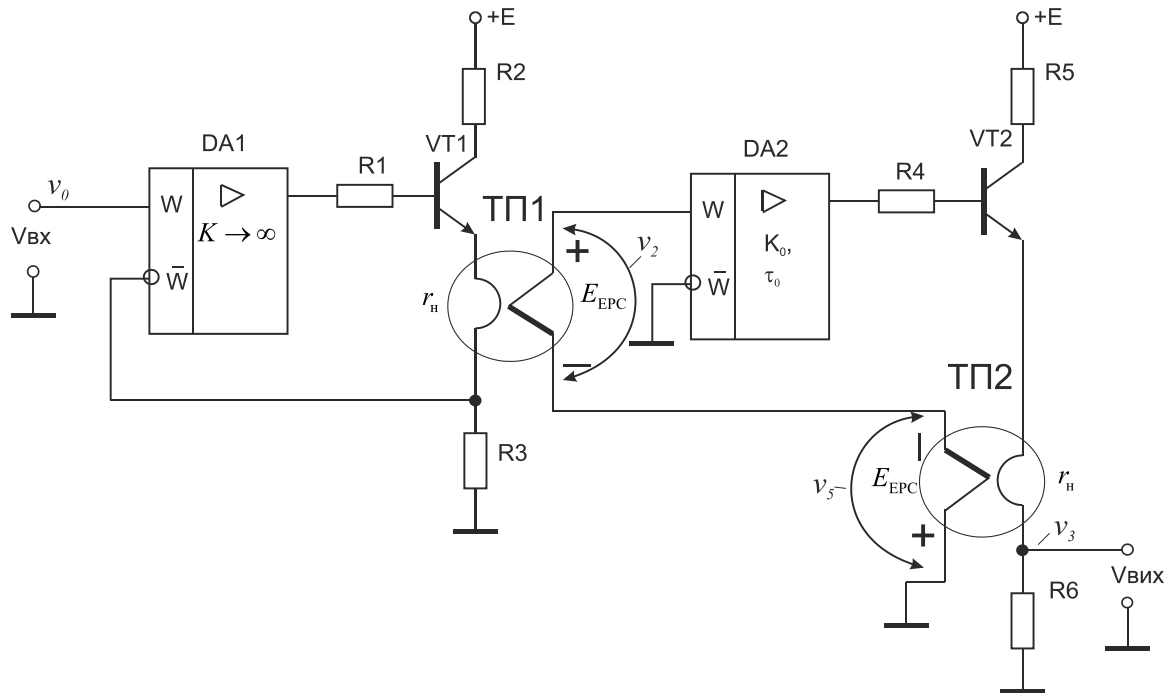


Рисунок 7.27 – Лінійний перетворювач СКЗ змінної напруги

Статичний режим. Розглянемо статичний режим роботи ЛПСКЗН за інформативним параметром вхідної напруги та визначимо нелінійність характеристики перетворення.

Термо-ЕРС окремого ТП визначається таким чином:

$$E_{\text{ЕРС}} = \alpha_{\text{Т}} \cdot i_{\text{НСКЗ}} v_{\text{НСКЗ}} = \frac{\alpha_{\text{Т}}}{r_{\text{н}}} \cdot v_{\text{НСКЗ}}^2 = \alpha_{\text{Т}} \cdot r_{\text{н}} i_{\text{НСКЗ}}^2,$$

де $\alpha_{\text{Т}}$ – коефіцієнт, який враховує ефективність перетворення тепла у вихідну напругу; $r_{\text{н}}$ – опір нагрівника; $i_{\text{НСКЗ}} = v_{\text{НСКЗ}} / r_{\text{н}}$ – струм (середньоквадратичне значення) через нагрівник ТП; $v_{\text{НСКЗ}}$ – середньоквадратичне значення змінної напруги безпосередньо на опорі нагрівника ТП.

У схемі на рис. 7.27 струм через нагрівник ПТ1 не залежить від значення його опору $r_{\text{н1}}$ (режим заданого струму). Враховуючи те, що $v_{\text{R3}}(t) = v_{\text{вх}}(t)$, струм $i_{\text{н,тп1}}(t)$ можна визначити наступним чином

$$i_{\text{н,тп1}}(t) = i_{\text{R3}}(t) = \frac{v_{\text{вх}}(t)}{R_3}.$$

Отже, вибираючи $R_3 = 100$ Ом, одержимо при $v_{\text{вхСКЗ}} = 1$ В струм через нагрівник $i_{\text{н,скз,тп1}} = 10$ мА. Якщо при $i_{\text{н,скз,тп1}} = 10$ мА

вихідна термо-ЕРС $E_{\text{ЕРС}} = 16 \text{ мВ}$, то функція перетворення для ТП1 за середньоквадратичним значенням вхідної напруги буде $v_2 = E_{\text{ЕРС}_{\text{ТП1}}} = k_1 \cdot v_{\text{вхСКЗ}}^2$, де $0,016 \text{ В} = k_1 \cdot v_{\text{вхСКЗ}}^2 = k_1 \cdot (1\text{В})^2$, відповідно $k_1 = \frac{0,016\text{В}}{(1\text{В})^2} = 0,016 \left(\frac{1}{\text{В}}\right)$.

Аналогічно для ТП2 $i_{\text{н}_{\text{ТП2}}}(t) = \frac{v_{\text{вих}}(t)}{R_6}$. Якщо, також вибираємо $R_6 = 100 \text{ Ом}$, то отримуємо те, що при вихідній напрузі $v_{\text{вих}} = 1 \text{ В}$ (напруга постійного струму), струм через нагрівник $i_{\text{н}_{\text{ТП2}}} = 10 \text{ мА}$. При $i_{\text{н}_{\text{ТП2}}} = 10 \text{ мА}$ вихідна термо-ЕРС $E_{\text{ЕРС}} = 16 \text{ мВ}$. Отже, функція перетворення для ТП2 в складі схеми буде $v_5 = E_{\text{ЕРС}_{\text{ТП2}}} = k_2 \cdot v_{\text{вих}}^2$, де $0,016 \text{ В} = k_2 \cdot v_{\text{вих}}^2 = k_2 \cdot (1\text{В})^2$ і відповідно $k_2 = \frac{0,016\text{В}}{(1\text{В})^2} = 0,016 \left(\frac{1}{\text{В}}\right)$.

Характеристика перетворення ЛПСКЗН за схемою рис. 7.27 у статичному режимі визначена в документі Mathcad на рис. 7.28:

$$v_{\text{вих}} = F(v_{\text{вхСКЗ}}) = \frac{1}{2Kk_2} [-1 + \sqrt{1 + 4K^2k_1k_2v_{\text{вхСКЗ}}^2}],$$

де K – коефіцієнт підсилення підсилювача на постійному струмі.

При збільшенні K характеристика наближається до лінійній:

$$v_{\text{вих}} = F(v_{\text{вхСКЗ}}) = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \cdot v_{\text{вхСКЗ}}.$$

У наступному документі Mathcad (рис. 7.29) наведено приклад, як можна ще зменшити похибку нелінійності від статизму системи.

Метод полягає в тому, що в прямий канал підсилення введена додаткова нелінійність типу $\sqrt{\quad}$. В результаті глибина від'ємного зворотного зв'язку не залежить від рівня перетворюваного сигналу.

Статична характеристика ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворювань

$$TOL := 10^{-6}$$

Given

$$v2 = k1 \cdot v^2 \quad v5 = k2 \cdot v3^2 \quad (v2 - v5) \cdot K = v3$$

$$\left[(\text{Find}(v2, v5, v3))^{\langle 0 \rangle} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} k1 \cdot v^2 \\ \frac{K \cdot k1 \cdot v^2 - \frac{1}{2 \cdot K \cdot k2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k2 \cdot k1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{K} \\ \frac{1}{2 \cdot K \cdot k2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k2 \cdot k1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right]$$

$$v3 := \frac{1}{2 \cdot K \cdot k2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k2 \cdot k1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \lim_{K \rightarrow \infty} v3 \rightarrow \frac{\left(k2 \cdot k1 \cdot v^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{k2} \quad \text{- вихідна напруга}$$

Передатна характеристика

$$k1 := 0.016 \quad k2 := 0.016 \quad K := 100$$

$$F(x) := \frac{1}{2 \cdot K \cdot k2} \cdot \left[-1 + \left(1 + 4 \cdot K^2 \cdot k2 \cdot k1 \cdot x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{- реальна характеристика перетворення}$$

$$F0(x) := \frac{\left(k2 \cdot k1 \cdot x^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{k2} \quad \text{- ідеальна лінеаризована характеристика перетворення}$$

$$\Delta F(x) := F(x) - F0(x) \quad \text{- похибка від нелінійності}$$

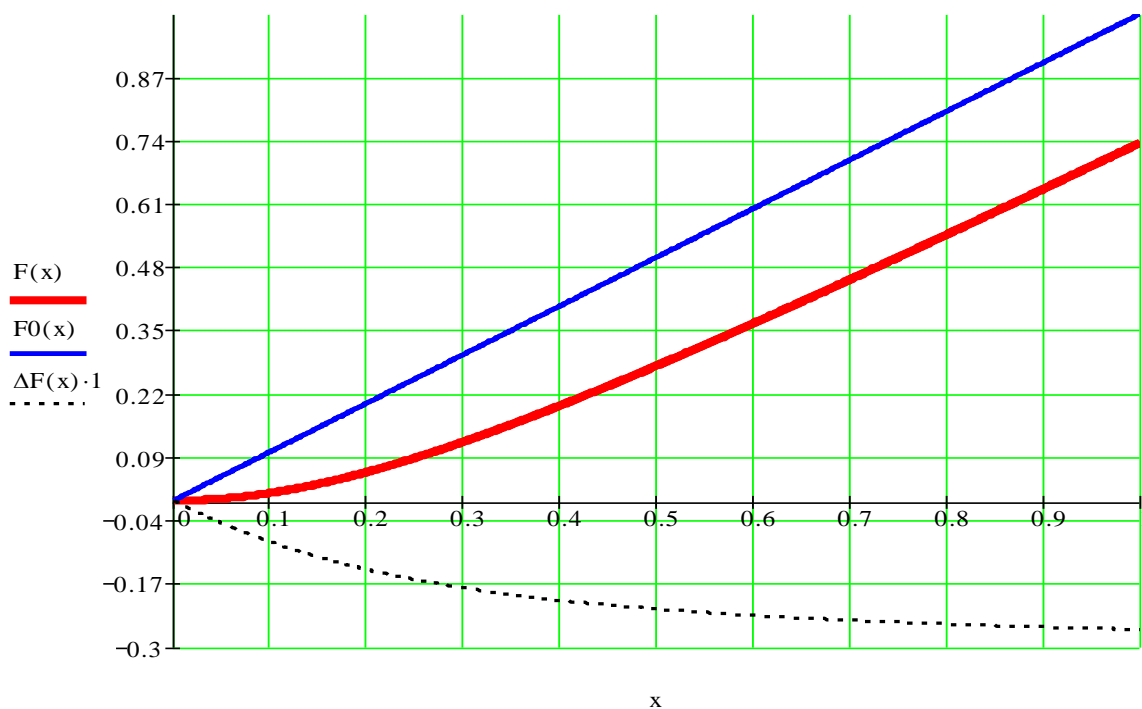


Рисунок 7.28 – Статична характеристика ЛПСКЗН

Статична характеристика ЛПСКЗН за методом взаємно-зворотних перетворювань

Given

$$v_2 = k_1 \cdot v^2 \quad v_5 = k_2 \cdot v_3^2 \quad \sqrt{v_2 - v_5} \cdot K = v_3 \quad \text{- введення нелінійності типу } \sqrt{\quad} \text{ в канал підсилення}$$

$$v_3 := \text{Find}(v_2, v_5, v_3)_2$$

$$v_3 \rightarrow \left[k_1 \cdot \frac{v^2}{(k_2 \cdot K^2 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K \quad \lim_{K \rightarrow \infty} v_3 \rightarrow \left(k_1 \cdot \frac{v^2}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- вихідна напруга}$$

Передатна характеристика

$$k_1 := 0.016 \quad k_2 := 0.016 \quad K := 100$$

$$F(x) := \left[k_1 \cdot \frac{x^2}{(k_2 \cdot K^2 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K \quad \text{- реальна характеристика перетворення}$$

$$F_0(x) := \left(k_1 \cdot \frac{x^2}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- ідеальна лінеарізована характеристика перетворення}$$

$$\Delta F(x) := F(x) - F_0(x) \quad \text{- похибка від нелінійності}$$

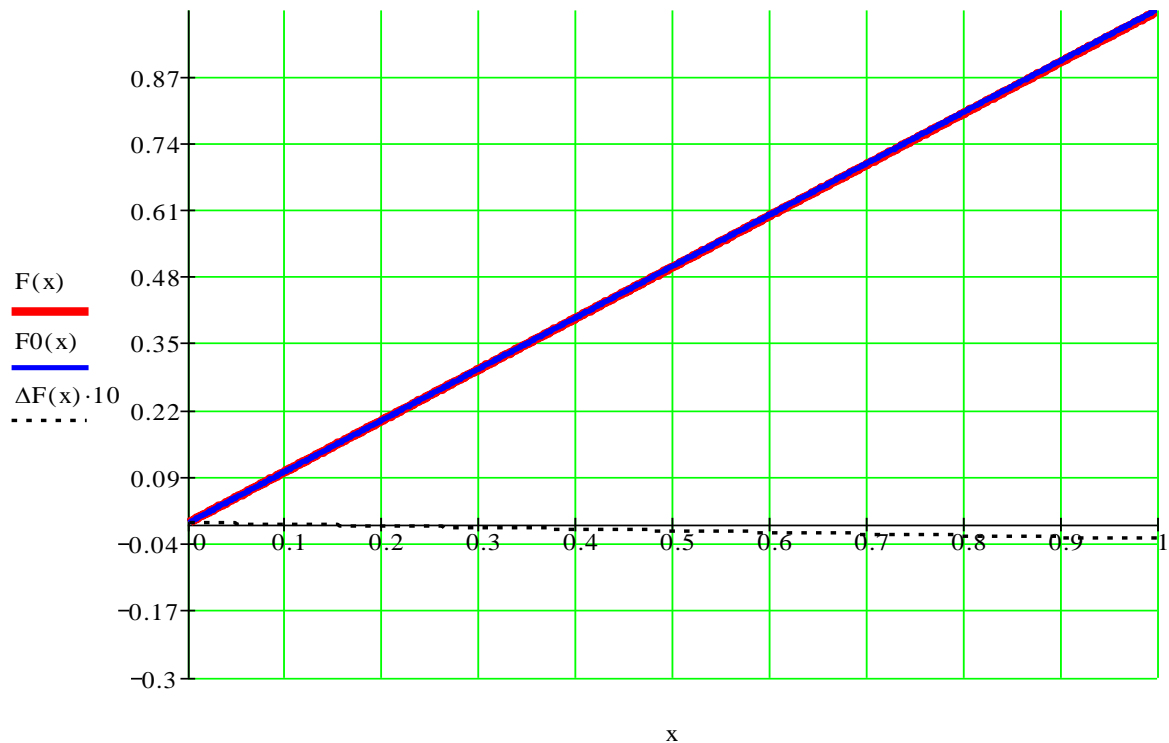


Рисунок 7.29 – Зменшення похибки нелінійності від статизму системи

Динамічний режим. Якщо розглядати окремий ТВБ в динамічному режимі, то час встановлення вихідної напруги дуже значний, що визначається великим за значенням τ .

Метод взаємно-зворотних перетворень дозволяє суттєво зменшити час встановлення вихідної напруги зі заданою точністю. Отже, розглянемо роботу схеми в динаміці.

Динамічну модель окремого ТВБ можна представити в спрощеному вигляді, як на рис. 7.30. Модель включає нелінійну квадратичну безінерційну частину (НЧ) та лінійну інерційну частину (ЛЧ), що має вигляд інерційної ланки першого порядку

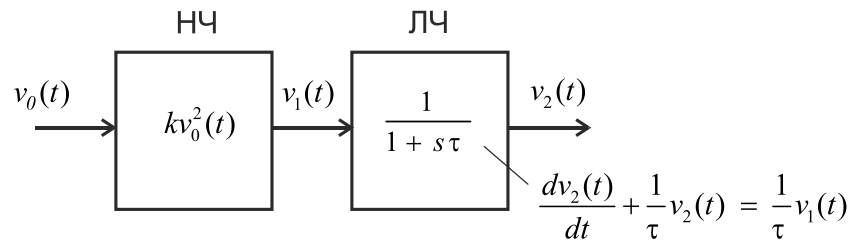


Рисунок 7.30 – Динамічна модель ТВБ

Динамічну модель всього ЛПСКЗН у вигляді структурної схеми наведено на рис. 7.31.

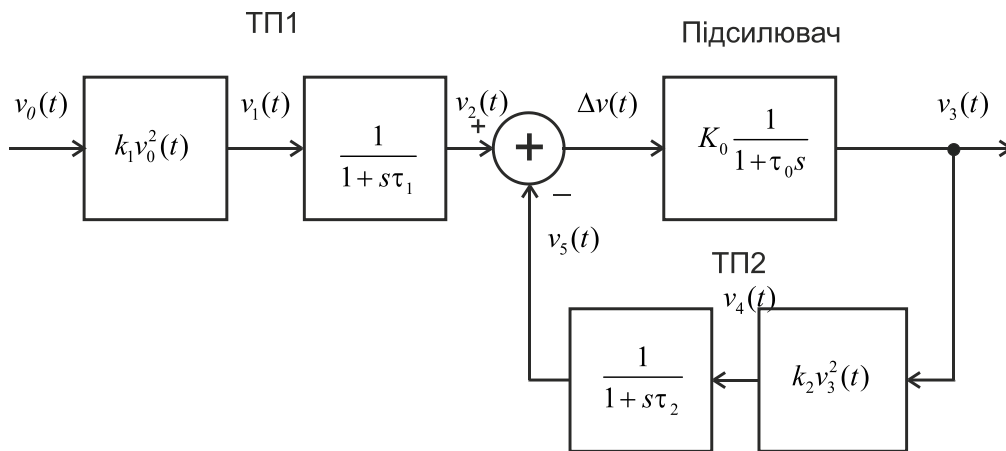


Рисунок 7.31 – Динамічна модель ЛПСКЗН за схемою рис. 7.27

Як бачимо, ЛПСКЗН включає нелінійну ланку в зворотному зв'язку, вплив якої відокремити не можна. Тому неможна аналізувати таку схему операторним методом, як це робиться для лінійних систем.

Опишемо роботу схеми системою диференціальних першого порядку рівнянь за методом змінних стану. Модель підсилювача у прямому колі (рис. 7.27) має вигляд:

$$H(s) = K_0 \frac{1}{1 + \tau_0 s}$$

Тому диференціальне рівняння, що описує підсилювач, буде наступним:

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{K_0}{\tau_0} \Delta v_{2,5}(t) - \frac{1}{\tau_0} v_3(t),$$

де $\Delta v_{2,5}(t) = v_2(t) - v_5(t)$ – вхідна напруга підсилювача; $v_3(t)$ – вихідна напруга підсилювача.

Диференціальне рівняння, яке описує напругу на виході ТП1:

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} v_1(t) - \frac{1}{\tau_1} v_2(t); \quad v_1(t) = k_1 v_0^2(t).$$

Диференціальне рівняння, яке описує напругу на виході ТП2:

$$\frac{dv_5(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} v_4(t) - \frac{1}{\tau_2} v_5(t); \quad v_4(t) = k_2 v_3^2(t).$$

Отже, нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку в формі Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} k_1 v_0^2(t) - \frac{1}{\tau_1} v_2(t); \\ \frac{dv_5(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} k_2 v_3^2(t) - \frac{1}{\tau_2} v_5(t); \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{K_0}{\tau_0} [v_2(t) - v_5(t)] - \frac{1}{\tau_0} v_3(t). \end{cases} \begin{cases} v_2(0) = 0; \\ v_5(0) = 0; \\ v_3(0) = 0. \end{cases}$$

Система містить одне *нелінійне* диференціальне рівняння відносно змінних стану. Початкові умови для змінних стану $v_2(t)$, $v_5(t)$, $v_3(t)$ приймаємо нульовими. Після розв'язку цієї системи відносно змінних $v_2(t)$, $v_5(t)$, $v_3(t)$ можна визначити вихідну напругу перетворювача $v_3(t)$, а також усі інші процеси в схемі.

Фрагмент документа Mathcad з прикладом розв'язку системи наведено на рис. 7.32. На рис. 7.33 наведено зображення процесів у ЛПСКЗН в динамічному режимі (далі по тексту – "динаміка") при підключенні до джерела постійної напруги, якщо стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с.

Отже, якщо ТП1 і ТП2 ідентичні за параметрами, то встановлення вихідної напруги ЛПСКЗН відбувається набагато раніше, ніж встановлення термо-ЕРС окремих термперетворювачів.

На рис. 7.34 наведено динаміку ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги низької частоти $f = 10$ Гц (стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с).

Бачимо, що на низьких частотах виникають пульсації термо-ЕРС із-за недостатньої інерційності ТП, які підсилюються та виникають на виході ЛПСКЗН.

Дослідження динаміки лінійного перетворювача СКЗ змінної напруги за методом взаємно-зворотних перетворень

$v_0(t) := 0.7$ - вхідна напруга ЛПСКЗН, В $TOL := 10^{-6}$

Параметри підсилювача:

Параметри ТП1 і ТП2:

$K_0 := 10000$ $f_s := 1.592$ - частота зрізу АЧХ підсилювача, Гц $\tau_1 := 1.5$ $k_1 := 0.016$
 $\tau_0 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_s}$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача, сек. $\tau_2 := 1.5$ $k_2 := 0.016$

Розв'язок

$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор початкових умов для змінних $V_2(t), V_5(t), V_3(t)$

- Розв'язок нормальної системи (в формі Коші) *нелінійних диференціальних рівнянь* першого порядку, складеної за методом змінних стану.

$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1} \cdot v_0(t)^2 - \frac{1}{\tau_1} \cdot x_0 \\ \frac{k_2}{\tau_2} \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{\tau_2} \cdot x_1 \\ \frac{K_0}{\tau_0} \cdot (x_0 - x_1) - \frac{1}{\tau_0} \cdot x_2 \end{bmatrix}$ - символічний вектор правих частин системи *нелінійних* диференціальних рівнянь першого порядку.

$\frac{dv_2(t)}{dt}$
 $\frac{dv_5(t)}{dt}$
 $\frac{dv_3(t)}{dt}$

$T := 10$ - інтервал аналізу, сек.

$Z := Rkadapt(x, 0, T, 10000, D)$ - Розв'язок системи *нелінійних* диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

Рисунок 7.32 – Математична модель ЛПСКЗН (за методом взаємно-зворотних перетворень) у вигляді вектору D(t, x) правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь та її розв'язок

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$n := 0..9999$ $v2_n := Z_{n,1}$ $v5_n := Z_{n,2}$ $v3_n := Z_{n,3}$

$\Delta v_n := v2_n - v5_n$ - напруга некомпенсації $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача

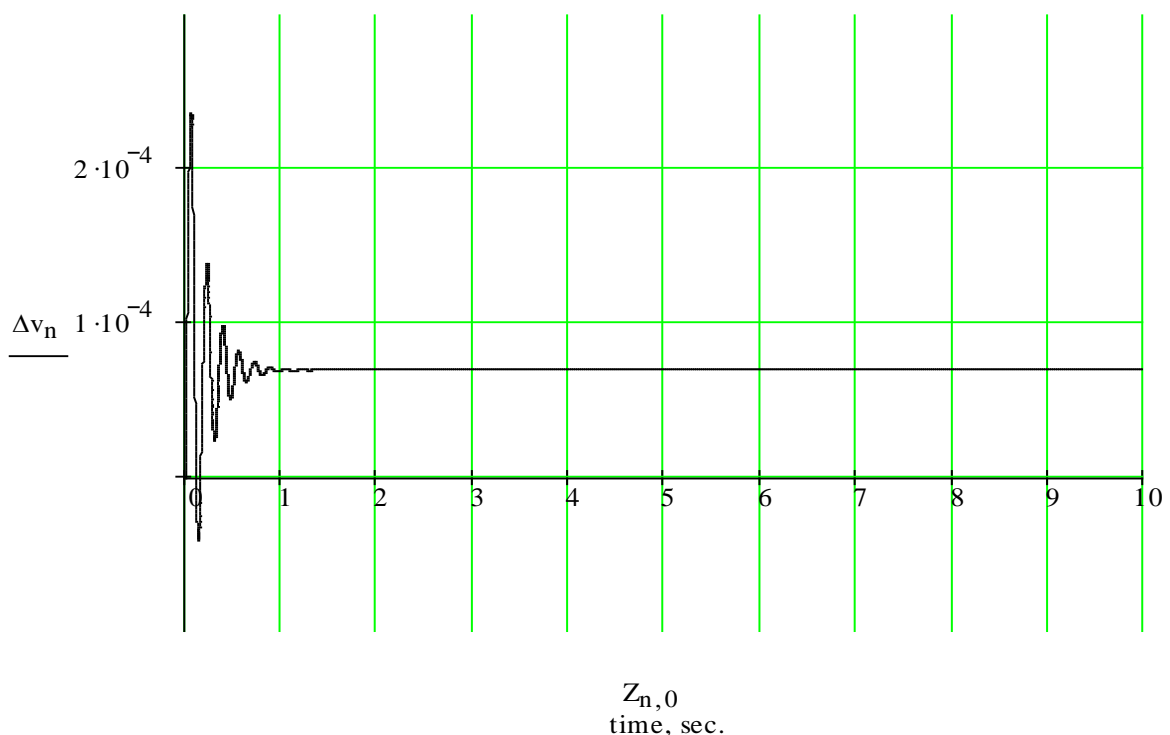
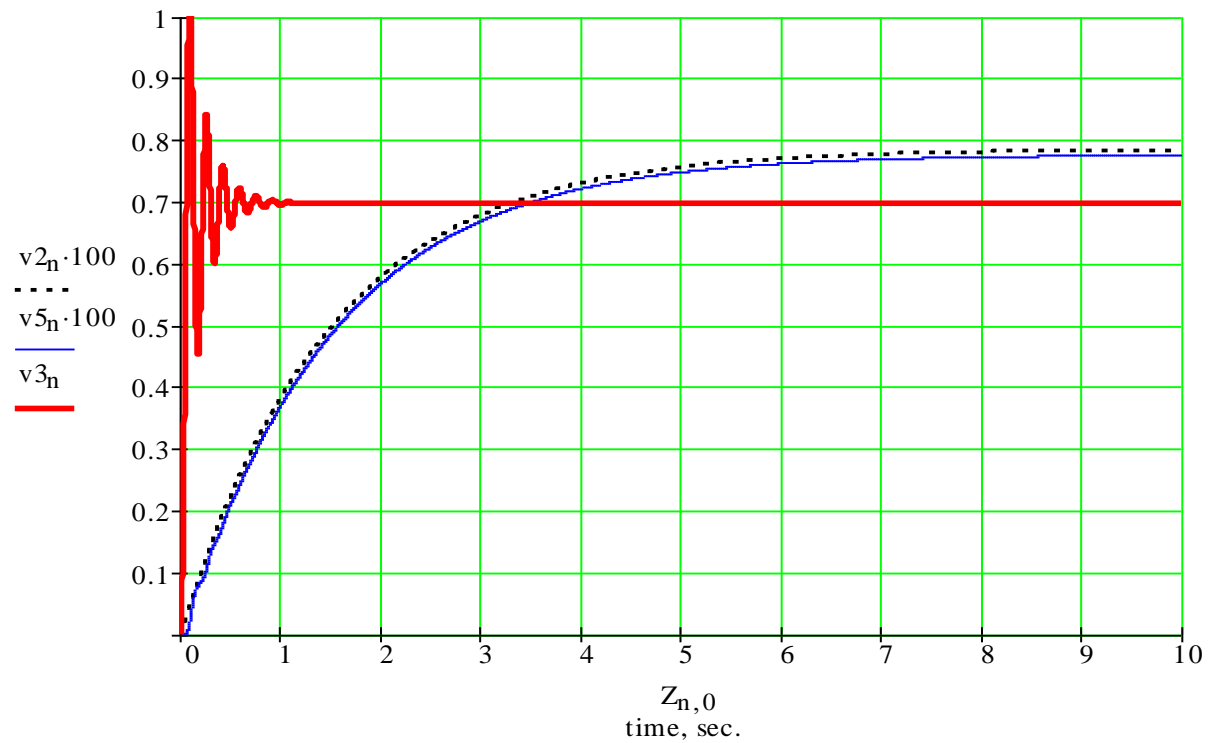


Рисунок 7.33 – Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела постійної напруги, якщо $K_0 = 10000$; $\tau_0 = 0,1$ с :

$v2$ – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); $v5$ – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$); $v3$ – вихідна напруга ЛПСКЗН; Δv – напруга некомпенсації

$$VRMS := 0.7 \quad V_0 := VRMS \cdot \sqrt{2}$$

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$$n := 0..9999 \quad v_{2n} := Z_{n,1} \quad v_{5n} := Z_{n,2} \quad v_{3n} := Z_{n,3} \quad \Delta v_n := v_{2n} - v_{5n}$$

$$t_n := Z_{n,0} \quad v_{0n} := V_0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)) \quad \tau_0 = 0.1 \quad \text{- стала часу підсилювача}$$

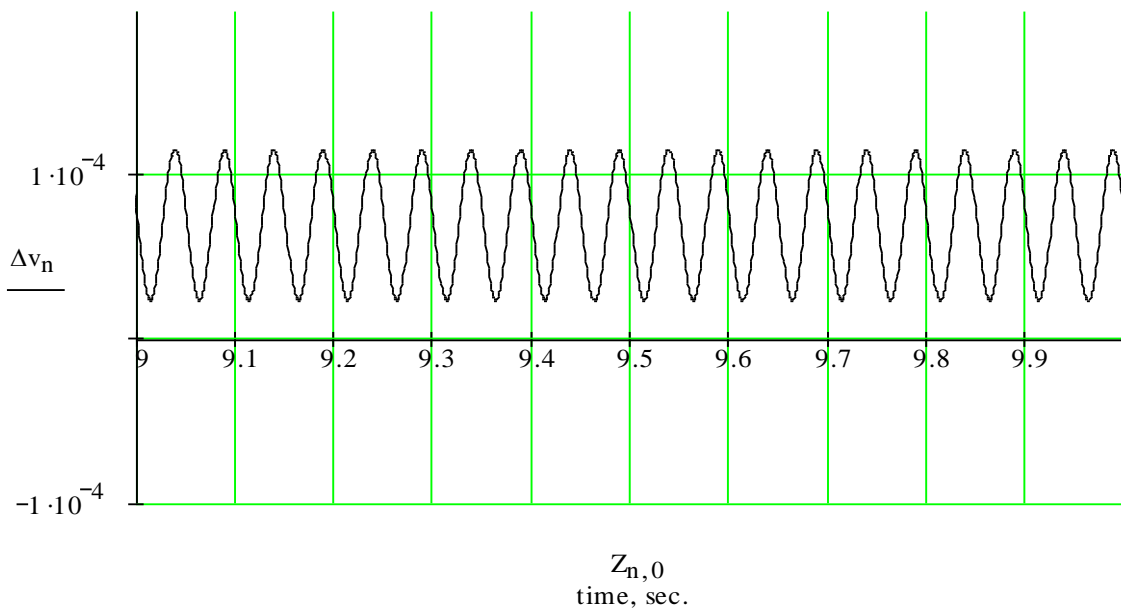
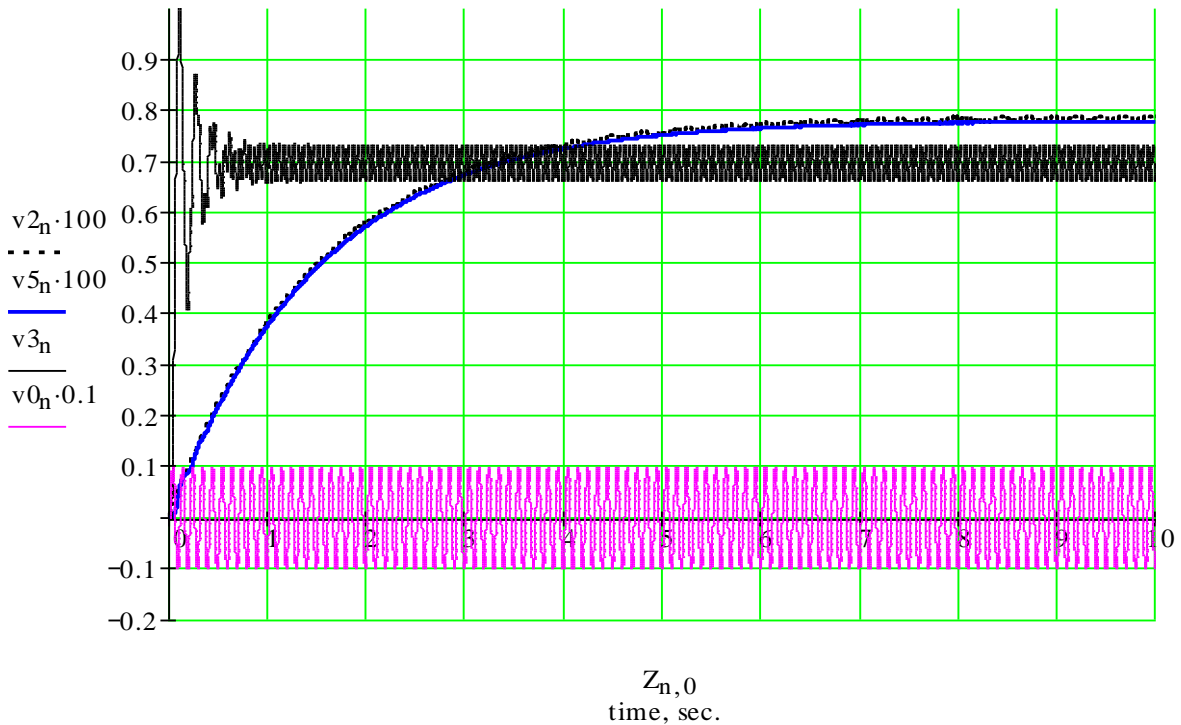


Рисунок 7.34 – Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц ($\tau_0 = 0,1$ с):

v_2 – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); v_5 – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$);
 v_3 – вихідна напруга ЛПСКЗН; v_0 – вхідна напруга (масштаб $\times 0,1$);
 Δv – напруга некомпенсації

$$VRMS := 0.7 \quad V_0 := VRMS \cdot \sqrt{2}$$

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$$n := 0..9999 \quad v_{2n} := Z_{n,1} \quad v_{5n} := Z_{n,2} \quad v_{3n} := Z_{n,3} \quad \Delta v_n := v_{2n} - v_{5n}$$

$$t_n := Z_{n,0} \quad v_{0n} := V_0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)) \quad \tau_0 = 1 \quad - \text{ стала часу підсилювача}$$

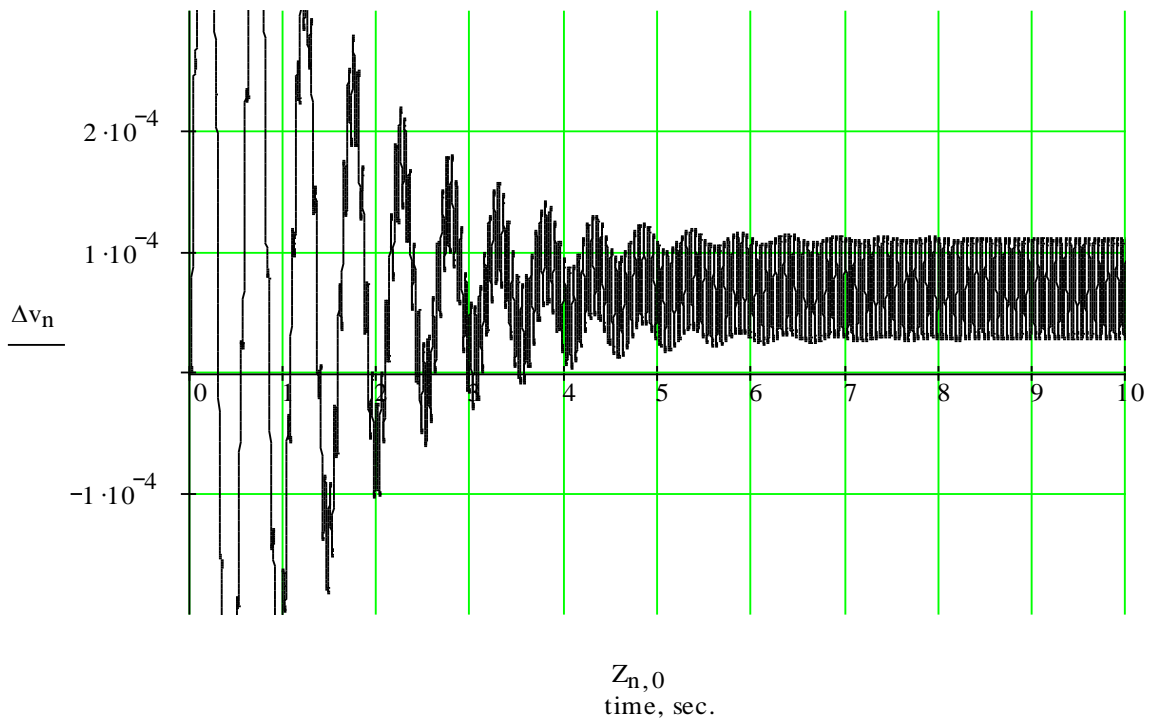
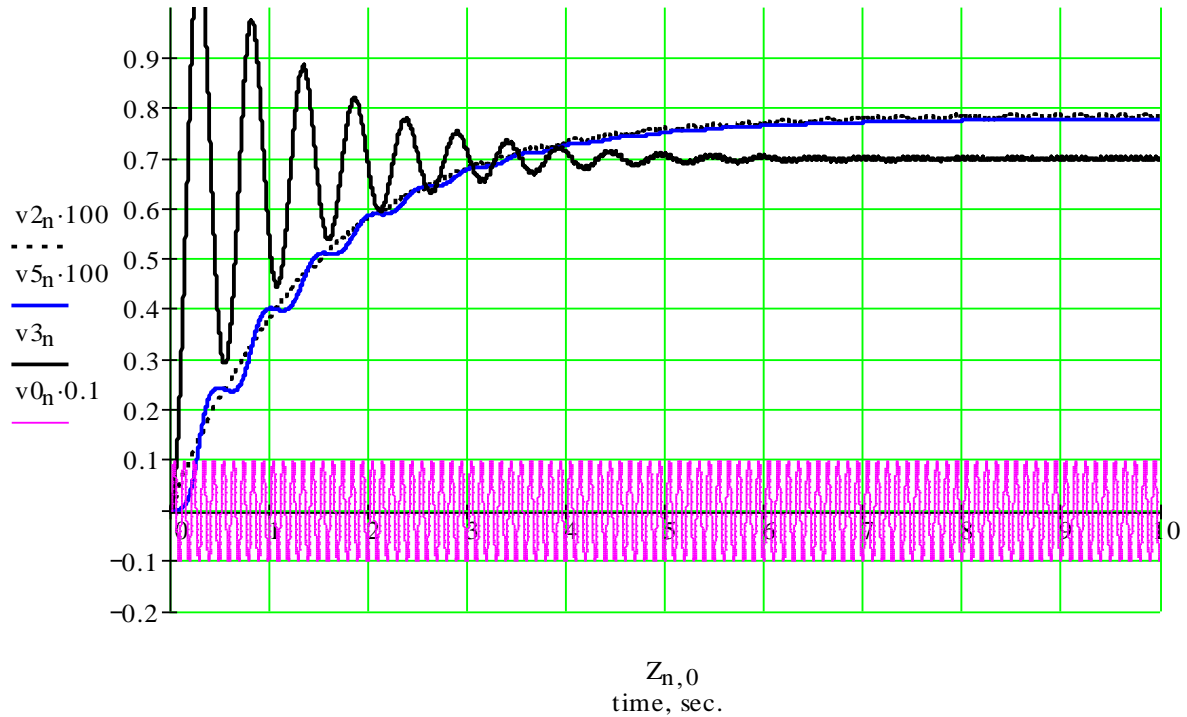


Рисунок 7.35 – Динаміка ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц ($\tau_0 = 1$ с):

*v_2 – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); v_5 – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$);
 v_3 – вихідна напруга ЛПСКЗН; v_0 – вхідна напруга (масштаб $\times 0,1$);*

Δv – напруга некомпенсації

На рис. 7.35 наведено динаміку ЛПСКЗН при $f = 10$ Гц, якщо стали часу підсилювача збільшити до $\tau_0 = 1$ с. Бачимо, що рівень напруги низькочастотних пульсацій на виході ЛПСКЗН зменшений, але це досягнуто за рахунок значного збільшення часу встановлення вихідної напруги.

Розглянемо приклад заглушення пульсацій на низьких та інфранизьких частотах. Метод полягає в введенні додаткового каналу перетворення (рис. 7.36) на базі ТПЗ, на який подається сигнал, що має зсув за фазою на 90° відносно вхідного сигналу перетворювача, та в додаванні вихідних термо-ЕРС ТП1 і ТП3.

Метод не знижує швидкодії самого лінійного перетворювача, але фазообертач "вносить" власний вплив у встановлення вихідного сигналу ЛПСКЗН.

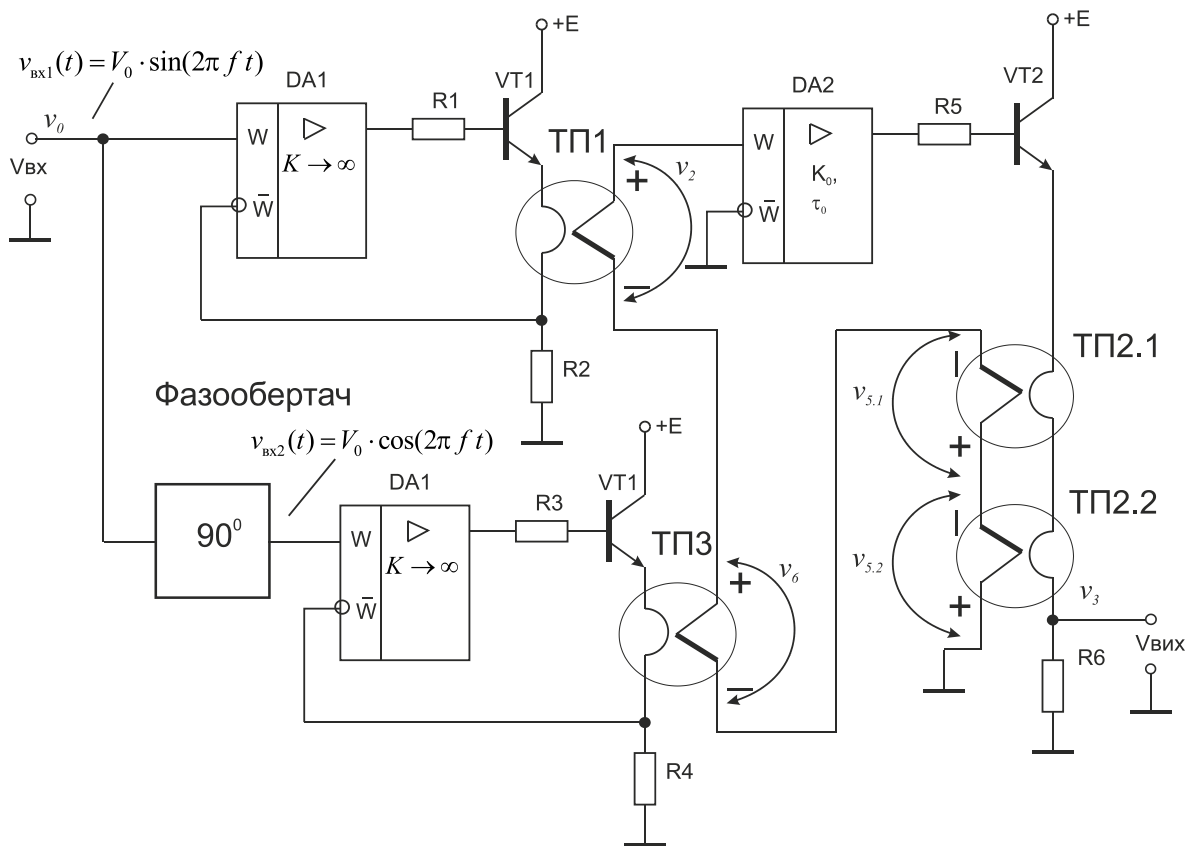


Рисунок 7.36 – Введення додаткового каналу корекції пульсацій термо-ЕРС на низьких частотах

На рис. 7.37 наведено математичну модель ЛПСКЗН у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних, що описує схему в даному випадку.

На рис. 7.38 наведено динаміку ЛПСКЗН при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц (стала часу $\tau_0 = 0,1$ с). Для наочності введена деяка неідентичність термоперетворювачів.

Дослідження методу корекції пульсацій на низьких частотах

$$\begin{aligned} \text{TOL} &:= 10^{-6} \\ \text{VRMS} &:= 0.7 \quad V_0 := \text{VRMS} \cdot \sqrt{2} \quad f := 10 \quad v_0(t) := V_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad \text{- вхідна напруга} \\ \phi &:= 0 \quad z_k(t) := V_0 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{180} \cdot \phi\right) \quad \text{- компенсуюча напруга} \end{aligned}$$

Параметри підсилювача:

$$\begin{aligned} K_0 &:= 10000 \quad f_s := 1.5917 \quad \text{- частота зрізу АЧХ} \\ &\quad \text{підсилювача, Гц} \\ \tau_0 &:= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_s} \quad \tau_0 = 0.1 \quad \text{- стала часу підсилювача, сек.} \end{aligned}$$

Параметри ТП1 і ТП2:

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= 1.5 \quad k_1 := 0.016 \\ \tau_2 &:= 1.5 \quad k_2 := 0.016 \end{aligned}$$

Параметри ТП3 в
коректуючому каналі

$$\tau_3 := 1.4 \quad k_3 := 0.016$$

Розв'язок

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор початкових умов для змінних} \\ V_2(t), V_5(t), V_3(t), V_6(t)$$

- Розв'язок нормальної системи
(в формі Коші) *нелінійних*
диференціальних рівнянь
першого порядку, складеної
за методом змінних стану.

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1} \cdot v_0(t)^2 - \frac{1}{\tau_1} \cdot x_0 \\ \frac{k_2}{\tau_2} \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{\tau_2} \cdot x_1 \\ \frac{K_0}{\tau_0} \cdot (x_0 - 2 \cdot x_1 + x_3) - \frac{1}{\tau_0} \cdot x_2 \\ \frac{k_3}{\tau_3} \cdot z_k(t)^2 - \frac{1}{\tau_3} \cdot x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- символічний вектор правих частин} \\ \text{системи } \textit{нелінійних} \text{ диференціальних} \\ \text{рівнянь першого порядку.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{dv_2(t)}{dt} \\ \frac{dv_5(t)}{dt} \\ \frac{dv_3(t)}{dt} \\ \frac{dv_6(t)}{dt} \end{array}$$

T := 10 - інтервал аналізу, сек.

Z := Rkadapt(x, 0, T, 10000, D) - **Розв'язок системи *нелінійних* диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта зі змінним кроком**

Rkadapt(v, x1, x2, npoints, D) - Returns a matrix of solution values for the differential equation specified by the derivatives in D and having initial conditions v on the interval [x1,x2] using an adaptive step Runge-Kutta method. Parameter npoints controls the number of rows in the matrix output.

*Рисунок 7.37 – Математична модель ЛПСКЗН (у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи *нелінійних* диференціальних) у випадку додаткового каналу корекції напруги пульсацій та її розв'язок*

$VRMS := 0.7$ $V_0 := VRMS \cdot \sqrt{2}$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$, $V_6(t)$:

$n := 0..9999$ $v_{2n} := Z_{n,1}$ $v_{5n} := Z_{n,2}$ $v_{3n} := Z_{n,3}$ $v_{6n} := Z_{n,4}$

$v_{26n} := v_{6n} + v_{2n}$ $t_n := Z_{n,0}$ $v_{0n} := V_0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$ $\Delta v_n := v_{2n} + v_{6n} - 2 \cdot v_{5n}$
 - напруга некомпенсації

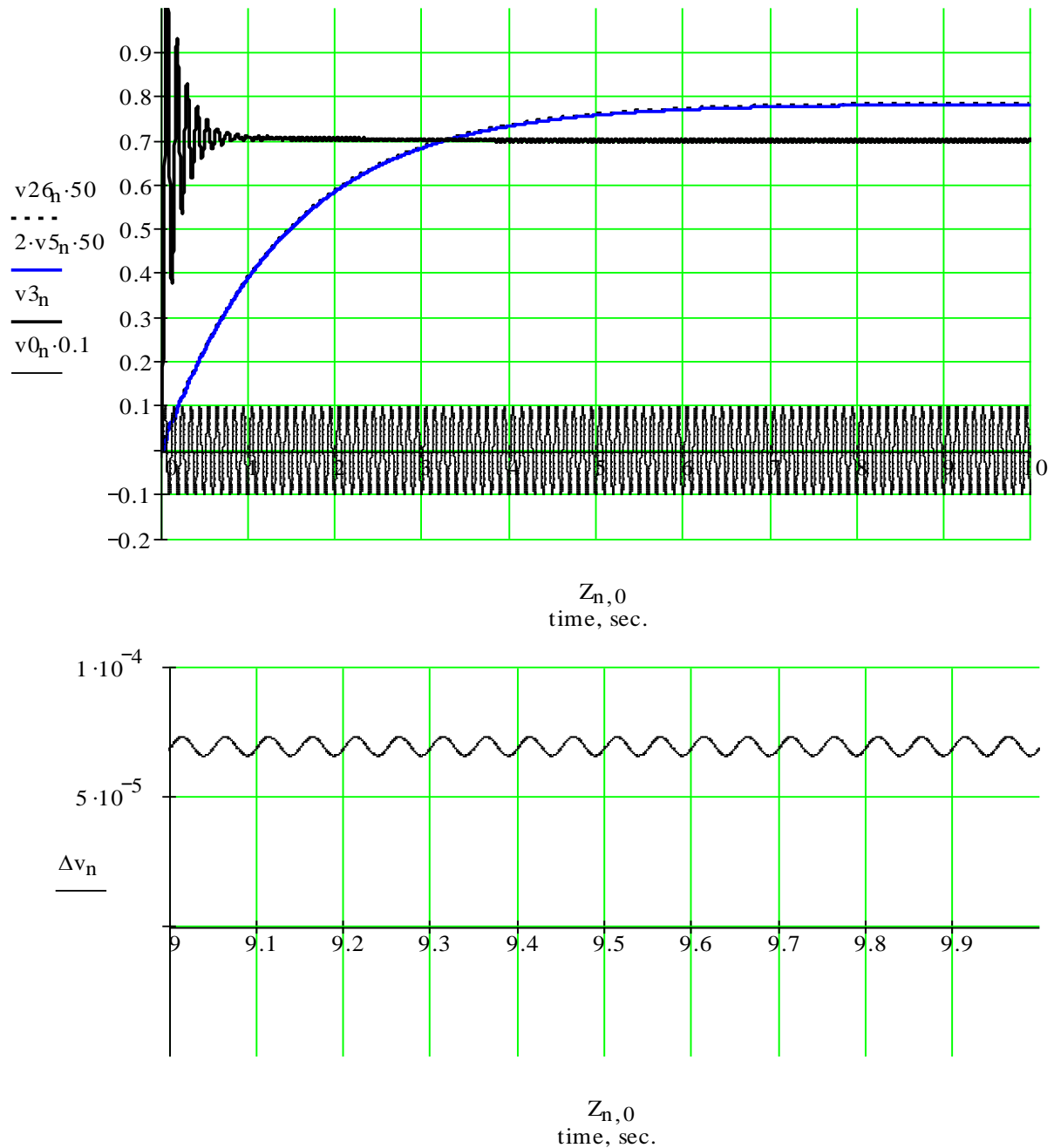


Рисунок 7.38 – Динаміка ЛПСКЗН з корекцією пульсацій при підключенні до джерела синусоїдальної напруги частоти $f = 10$ Гц (стала часу $\tau_0 = 0,1$ с):

v_{26} – вихідна напруга ТП1+ТП3 (масштаб $\times 50$); $2 \cdot v_5$ – вихідна напруга 2-ТП2 (масштаб $\times 50$); v_3 – вихідна напруга ЛПСКЗН; v_0 – вхідна напруга ЛПСКЗН (масштаб $\times 0,1$); Δv – напруга некомпенсації

Бачимо, що напруга пульсацій у цьому випадку суттєво зменшується, в порівнянні з тим, що наведено на рис. 7.34, при тій же швидкодії встановлення вихідної напруги ЛПСКЗН (стала часу $\tau_0 = 0,1$ с). За повної ідентичності ТП1 і ТП3 можна досягти повного заглушення пульсації термо-ЕРС (взаємно віднімаються) в різницевій напрузі некомпенсації, що подається на вхід підсилювача.

Висновки

1. Для суттєвого зменшення часу встановлення потрібно брати ТВБ з однаковими постійними часу та зменшувати постійну часу підсилювача.

2. Для зменшування похибки від нелінійності, а також від некомпенсації потрібно вибирати великий коефіцієнт підсилювача, але це призводить до зменшення стійкості системи з замкнутим зворотним зв'язком і, в наслідок цього, виникненню коливального характеру перехідного процесу встановлення вихідної напруги.

3. При підключенні до джерела напруги низької частоти виникають пульсації на виході перетворювача, обумовлені недостатньою інерційністю термоперетворювачів. Щоб зменшити рівень пульсацій, потрібно збільшувати постійну часу підсилювача. Однак це веде до небажаного суттєвого збільшення часу встановлення вихідної напруги. Тому використовують деякі спеціальні методи, спрямовані на зменшення напруги пульсацій на низьких частотах. Проте на високих частотах зазначена проблема не з'являється взагалі.

"Ковзкий" інтеграл, як модель вольтметра інтегруючого типу з кінцевим часом інтегрування. Розглянемо ще раз ЛПСКЗН (рис. 7.27), математичну модель якого у вигляді вектору $D(t, x)$ правих частин системи нелінійних диференціальних рівнянь було наведено на рис. 7.32. Але тепер вихідна напруга ЛПСКЗН $v_3(t)$ вимірюється вольтметром інтегруючого типу.

Основна особливість цифрових інтегруючих вольтметрів, які вимірюють середнє значення напруги за час інтегрування T_{int} , полягає у їхній здатності заглушувати завади – як випадкові, так і періодичні. Якщо вважати, що інтегральні відліки вхідної величини $x(t)$ за минулий інтервал T_{int} одержуємо *неперервно* в часі (а не циклічно, як це має місце у дійсності), то моделлю вихідної величини $y(t)$ може бути наступний інтеграл згортки, який ще називають "ковзкий" інтеграл:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T_{\text{int}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h_{\delta}(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T_{\text{int}}} \cdot \int_{t-T_{\text{int}}}^t x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

де для довільного t залежність $h_{\delta}(t-\tau)$ від τ матиме вигляд, зображений на рис. 7.39.

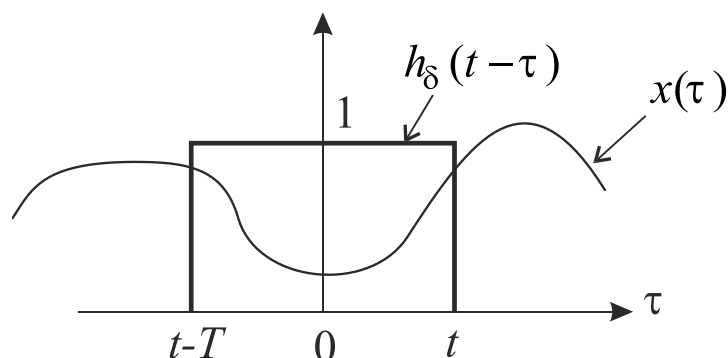


Рисунок 7.39 – Функції $h_{\delta}(t-\tau)$ і $x(\tau)$ для інтегратора з кінцевим часом інтегрування

Використання згортки є особливо ефективним при дослідженні систем, якщо їх імпульсні характеристики фінітні у часі. Такі системи не можна описати звичайними диференціальними рівняннями.

Нормована за амплітудою імпульсна характеристика ланки, що реалізує операцію "ковзкого" інтегрування, матиме вигляд:

$$h_{\delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_{\text{int}}}, & 0 < t \leq T_{\text{int}}; \\ 0, & t < 0; t > T_{\text{int}}. \end{cases}$$

Фрагмент документа Mathcad із використанням операції "ковзкого" інтегрування, що ілюструє ефект згладжування пульсацій вихідної напруги ЛПСКЗН $v_3(t)$ (частота вхідної напруги $f = 10$ Гц, стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с), наведено на рис. 7.40.

Системна функція, як перетворення Лапласа від $h_{\delta}(t)$, матиме вигляд:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT_{\text{int}}}}{s \cdot T_{\text{int}}}.$$

Звідси, зробивши заміну $s = j\omega$, дістанемо:

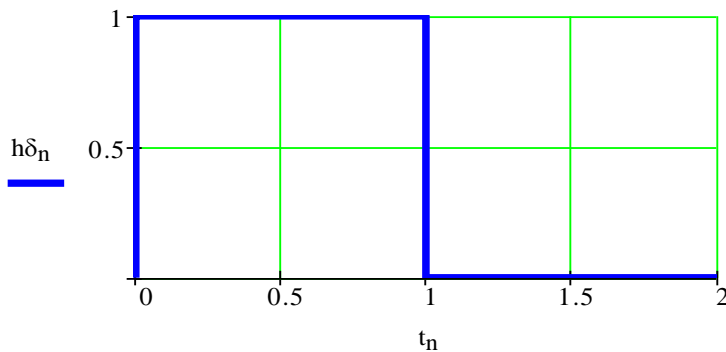
$$H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_{\text{int}}}}{j\omega \cdot T_{\text{int}}}.$$

Логарифмічну амплітудно-частотну характеристики ланки, що реалізує операцію "ковзкого" інтегрування, наведено на рис. 7.41. Отже, при часі інтегрування, кратному періоду завади, її заглушення прямує до нескінченності. Однак навіть при незначних відхиленнях частоти завади від її номінального значення коефіцієнт заглушення різко зменшується. Тому при прецизійних вимірюваннях застосовуються спеціальні заходи для спостереження за часом інтегрування.

$T_A := 10$ - загальний час аналізу вихідного сигналу ЛПСКЗН, сек.
 $NP := 10000$ $n := 0..NP$ $v_{3n} := Z_{n,3}$ $\tau_0 = 0.1$ - стала часу підсилювача
 $T_{int} := 1$ - інтервал (сек.) інтегрування вибирається рівним цілому числу періодів завади $t_n := n \cdot \frac{T_A}{NP}$ $\Delta := \frac{T_A}{NP}$

$N_{int} := \frac{NP}{T_A} \cdot T_{int}$ $N_{int} = 1 \times 10^3$ $\Delta = 1 \times 10^{-3}$

$h\delta_n := \begin{cases} \frac{1}{T_{int}} & \text{if } 0 < n \leq N_{int} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ - імпульсна характеристика інтегратора з кінцевим часом інтегрування T_{int} ("ковзкий" інтеграл)



дискретна згортка, що реалізує операцію "ковзкого" інтегрування:

$$v_{6n} := \Delta \cdot \sum_{m=0}^n v_{3m} \cdot h\delta_{n-m}$$

Вектори розв'язків для змінних $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_3(t)$:

$n := 0..NP - 1$ $v_{2n} := Z_{n,1}$ $v_{5n} := Z_{n,2}$ $v_{3n} := Z_{n,3}$ $\Delta v_n := v_{2n} - v_{5n}$
 $t_n := Z_{n,0}$ $v_{0n} := V_0 \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n))$

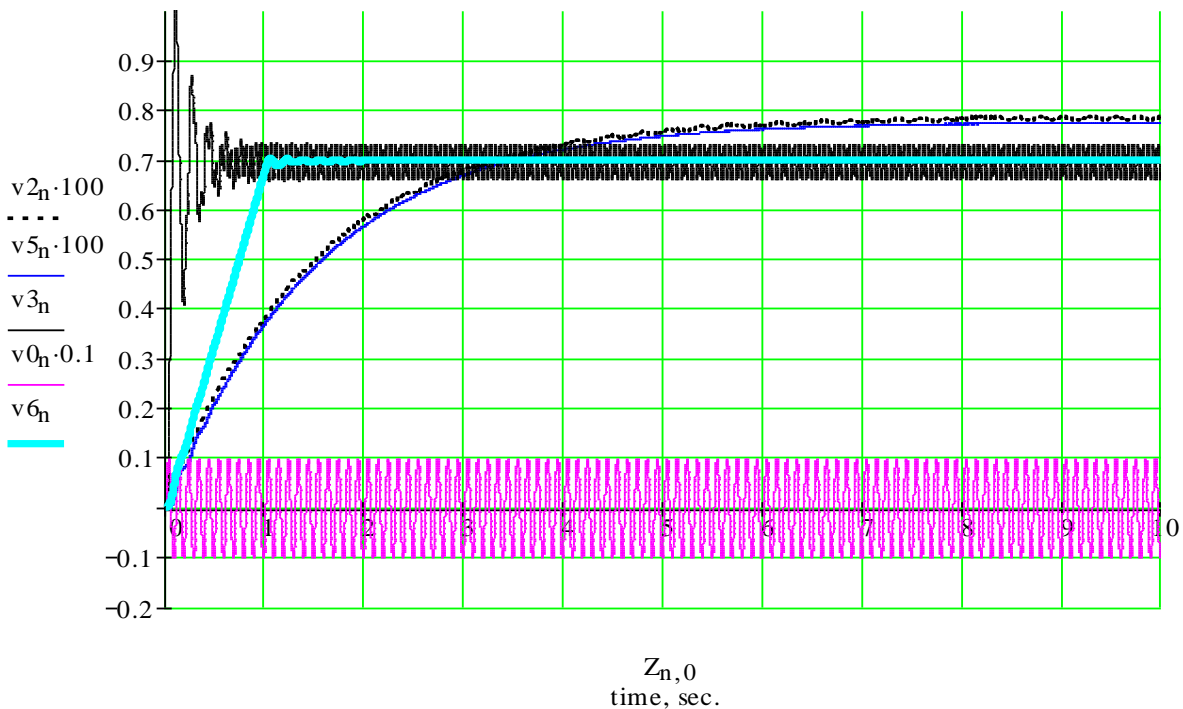


Рисунок 7.40 – Ефект згладжування пульсацій при вимірюванні вихідної напруги ЛПСКЗН вольтметром інтегруючого типу (підключення ЛПСКЗН до синусоїдальної напруги $f = 10$ Гц, стала часу підсилювача $\tau_0 = 0,1$ с):

v_2 – вихідна напруга ТП1 (масштаб $\times 100$); v_5 – вихідна напруга ТП2 (масштаб $\times 100$); v_3 – вихідна напруга ЛПСКЗН; v_0 – вхідна напруга (масштаб $\times 0,1$); v_6 – вихідна напруга ланки "ковзкого" інтегрування

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика ланки "ковзкого" інтегрування

$H(s) := \frac{1 - e^{-s \cdot T_{\text{int}}}}{T_{\text{int}} s}$ - системна функція інтегратора з кінцевим часом інтегрування ("ковзкий інтеграл")

$B0 := \text{BodePlot}(H, 0.01, 20)$ $i := 0.. \text{last}(B0^{(0)})$ $\text{last}(B0^{(0)}) = 4 \times 10^4$

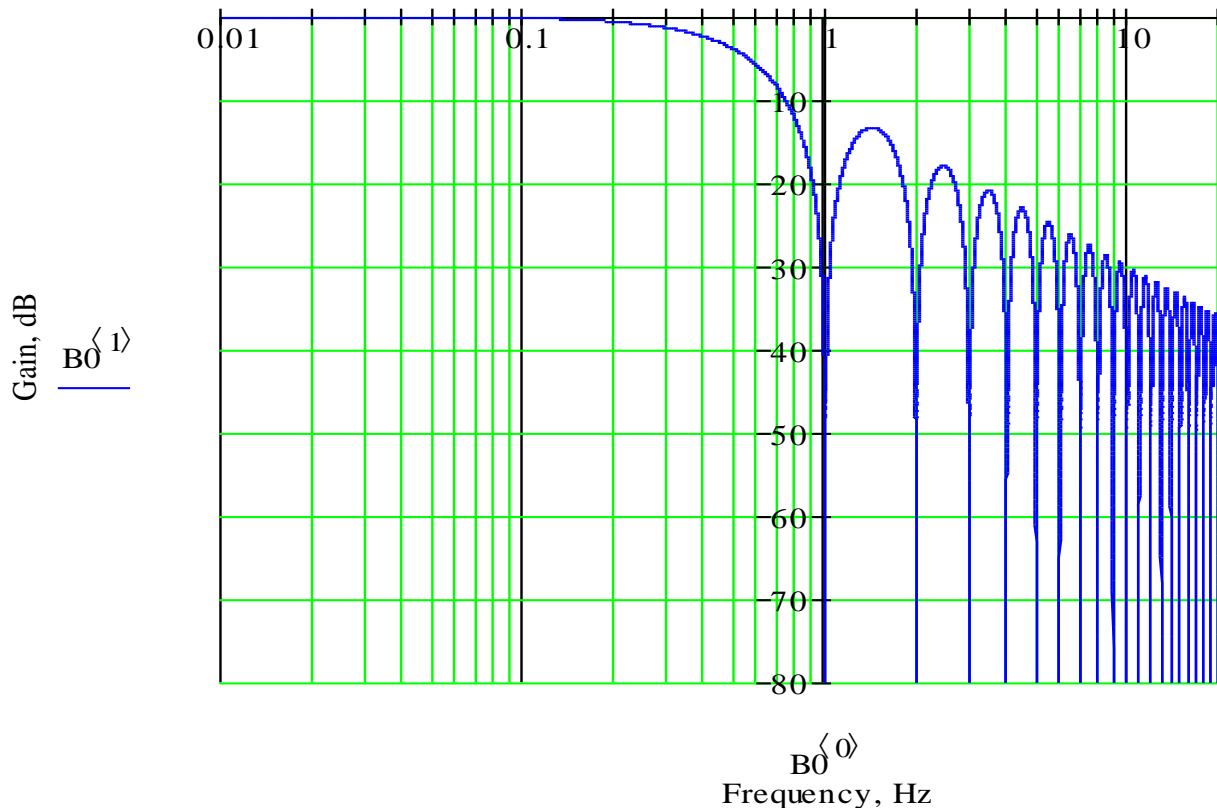


Рисунок 7.41 – Ефект нескінченного заглушення пульсацій на частотах, кратних $1/T_{\text{int}}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пампуро В.И. Прогнозирование стабильности информационных устройств. – К.:Техніка, 1978. – 248 с.
2. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1975. – 768 с.
3. Туз Ю.М. Структурные методы повышения точности измерительных устройств. – К.: Выща шк. Головное изд., 1976. – 256 с.
4. Бова М.Т., Гойжевський В.А., Маевський С.М.. Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці. – К.: Вища шк., 1972. – 220 с.
5. Стрижак Т.Г. Асимптотические методы нормализации. – К.: Выща шк. Головное изд., 1984. – 254 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
7. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век", 2005. – 400 с.
8. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre, 1844, 2 publ. 1861.
9. Дьяконов В.П. Mathcad 11/12/13 в математике. Справочник. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с.
10. Валенко В.С. Полупроводниковые приборы и основы схемотехники электронных устройств. – М.: "Додэка-XXI", 2001. – 368 с.
11. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-CAP. Версии 9, 10. – Смоленск, Смоленский филиал НИУ МЭИ, 2012. – 617 с.
12. Micro-CAP 9. Electronic Circuit Analysis Program Reference Manual. Copyright 1982-2008 by Spectrum Software 1021 South Wolfe Road Sunnyvale, CA 94088. – 916 s. – <http://www.spectrum-soft.com>.
13. Antognetti P., Massobrio G. Semiconductor Device Modeling with SPICE. – McGraw-Hill, Second Edition, 1993.
14. Зінковський Ю.Ф., Коваль А.В. Моделювання елементної бази електронних апаратів у комп'ютерному середовищі Micro-Cap. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. – 464 с.
15. Новгородцев А.Б. 30 лекций по теории электрических цепей: Учеб. для вузов. – Санкт-Петербург: СПб.: Политехника, 1995. – 519 с.
16. Туз Ю.М., Серпілін К.Л., Гапченко Л.М. Електронні вольтметри змінного струму (основи проектування). – Київ, Техніка, 1970. – 182 с.

Науково-технічне видання

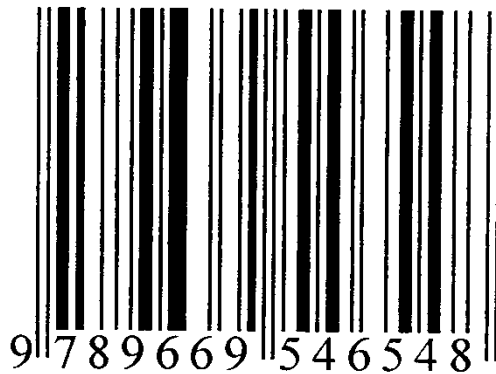
Туз Юліан Михайлович
Шумков Юрій Сергійович
Козир Олег Васильович

Автоматизація аналізу вимірювальних пристроїв

Монографія

За загальною редакцією д-ра техн. наук,
професора Ю.М. Туза

ISBN 966954654-0



Видавництво "Корнійчук", 04116, Київ-116,
вул. В.Василевської, 15, 15

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи № 424 від 18.04.2001 р.

Підписано до друку 01.12.2014 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура "Times". Наклад 300 прим. Зам. №14-247

Надруковано: ВД "ЕКМО" 01014 м. Київ, вул. Бастіонна 1/36
тел. (044) 331-88-12, e-mail: ekmo@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3000 від 15.10.2007 р.